Восточно-Казахстанский технический
университет им. Д. Серикбаева

УДК 681.5; 62-94; 004.896

На правах рукописи

ТОЛЫКБАЕВА МАРАЛ БАКЫТКАНОВНА

Адаптивное управление роботом-манипулятором

8D07101 – Автоматизация и управление

Диссертация на соискание степени
доктора философии (Ph.D.)

Отечественный научный
консультант:
д.ф.-м.н., профессор,
Алонцева Дарья Львовна

Зарубежный научный
консультант:
Ph.D., профессор,
Tamas Haidegger

Республика Казахстан
Усть–Каменогорск, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ 4
ВВЕДЕНИЕ 5
1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ 10
1.1 Современные роботы-манипуляторы как объекты управления 10
1.2 Особенности и проблемы управления последовательными роботами-манипуляторами 15
1.3 Анализ существующих методов траекторного управления роботами-манипуляторами 19
1.4 Современные подходы к адаптивному управлению роботами-манипуляторами 25
1.5 Анализ геометрических подходов и методов точной линеаризации в задачах управления роботами-манипуляторами 30
Выводы по разделу 1, постановка цели и задач диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту: 35
2 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА 37
2.1 Конфигурационное пространство последовательного робота-манипулятора 37
2.2 Кинематическая модель последовательного робота-манипулятора 40
2.3 Построение римановой метрики на основе кинетической энергии 43
2.4 Метрический тензор двухзвенного планарного манипулятора 47
2.5 Связность Леви-Чивиты и ковариантное ускорение 51
2.6 Геометрическое представление динамики манипулятора 54
2.7 Исследование геометрической модели методом компьютерного моделирования 58
Выводы по разделу 2 63
3 МЕТОД ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ НА ОСНОВЕ ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ 64
3.1 Постановка задачи траекторного управления последовательным роботом-манипулятором 64
3.2 Координатное представление геометрического уравнения динамики манипулятора 65
3.3 Точная линеаризация динамики манипулятора посредством обратной связи 66
3.4 Синтез регулятора траекторного управления на основе линеаризованной модели 67
3.5 Устойчивость и сходимость ошибки траекторного управления 69
3.6 Компьютерное моделирование системы траекторного управления двухзвенным манипулятором 70
Выводы по разделу 3 76

4 ИССЛЕДОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ 78
4.1 Постановка задачи адаптивного траекторного управления в условиях параметрической неопределённости и внешних возмущений 78
4.2 Робастное траекторное управление на основе точной линеаризации 80
4.3 Разработка адаптивно-робастного алгоритма траекторного управления 83
4.4 Анализ устойчивости адаптивной системы управления 86
4.5 Разработка имитационной модели двухзвенного манипулятора в MATLAB/Simulink 90
4.6 Исследование точности и устойчивости траекторного управления при изменении параметров манипулятора и воздействии внешних возмущений 96
Выводы по разделу 4 121
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 122
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 124
ПРИЛОЖЕНИЕ А - Акт о внедрении научно-исследовательской работы в учебный процесс 130
ПРИЛОЖЕНИЕ Б - Программа для ЭВМ №38548 132

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В тексте диссертационной работы использованы следующие сокращения:

3D	Трёхмерное представление (англ. Three-Dimensional)
CTC	Метод вычисляемых моментов (англ. Computed Torque Control)
FDM	Моделирование методом послойного наплавления (англ. Fused Deposition Modeling)
IoT	Интернет вещей (англ. Internet of Things)
MATLAB	Программная среда для численных вычислений и моделирования (англ. Matrix Laboratory)
MPC	Прогнозирующее управление на основе модели (англ. Model Predictive Control)
MRAC	Адаптивное управление с эталонной моделью (англ. Model Reference Adaptive Control)
PD	Пропорционально-дифференциальный регулятор (англ. Proportional-Derivative Controller)
PID	Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (англ. Proportional-Integral-Derivative Controller)
RMS	Среднеквадратическое значение (англ. Root Mean Square)
SCISM	Непрерывный интегральный скользящий режим с насыщением (англ. Saturated Continuous Integral Sliding Mode)
SE(3)	Специальная евклидова группа трёхмерного пространства (группа пространственных движений твёрдого тела)
SMC	Управление в скользящем режиме (англ. Sliding Mode Control)
SO(3)	Специальная ортогональная группа трёхмерного пространства (группа вращений)
ЭВМ	Электронная вычислительная машина

ВВЕДЕНИЕ

Ключевые слова: Робот-манипулятор, адаптивное управление, робастное управление, траекторное управление, нелинейные динамические системы, геометрические методы управления, дифференциальная геометрия, риманово многообразие, конфигурационное пространство, метрический тензор, линеаризация обратной связью, координатные преобразования, метод вычисляемых моментов.

Актуальность. Современное развитие робототехники характеризуется расширением областей применения робототехнических систем, повышением требований к точности воспроизведения заданных траекторий, динамическим характеристикам и способности функционировать в условиях неопределённости параметров и внешних воздействий. Особую значимость приобретают последовательные роботы-манипуляторы, применяемые в промышленной автоматизации, медицинской робототехнике, роботизированной обработке материалов, коллаборативных робототехнических системах и других областях, требующих точного управления движением и взаимодействия с окружающей средой.

Традиционные системы управления промышленными манипуляторами преимущественно основаны на позиционном и скоростном регулировании электроприводов. Вместе с тем совершенствование электродвигателей, развитие высокомоментных приводов и распространение технологий непосредственного привода создают предпосылки для более широкого применения систем управления моментами в сочленениях манипуляторов. Такие системы позволяют непосредственно учитывать динамические свойства механической конструкции, обеспечивать управление взаимодействием с внешней средой и реализовывать современные алгоритмы траекторного управления.

Однако управление моментами последовательного манипулятора представляет собой сложную научно-техническую задачу, обусловленную нелинейностью его динамики, взаимосвязанностью движений отдельных звеньев, зависимостью инерционных характеристик от конфигурации механизма, а также неопределённостью параметров математической модели. Указанные особенности ограничивают возможности применения традиционных линейных методов управления и обусловливают необходимость разработки подходов, учитывающих нелинейную динамическую структуру объекта управления.

Одним из перспективных направлений решения данной задачи является применение геометрических методов теории управления, основанных на использовании аппарата дифференциальной геометрии, римановых многообразий, групп и алгебр Ли. В рамках данного подхода конфигурационное пространство последовательного манипулятора рассматривается как гладкое многообразие, геометрическая структура которого определяется кинетической энергией механической системы. При выполнении условий невырожденности кинетическая энергия задаёт риманову метрику, позволяющую представить динамику манипулятора в геометрически согласованной форме.

Использование аппарата групп Ли при описании кинематики последовательного манипулятора обеспечивает единый подход к определению конфигураций, скоростей и пространственных преобразований его звеньев. Полученные кинематические соотношения позволяют аналитически вычислять метрический тензор конфигурационного пространства через геометрические и инерционные параметры механической системы. Такое представление создаёт математическую основу для исследования динамических свойств манипулятора и разработки методов преобразования его нелинейной модели.

Особый научный интерес представляет задача точной линеаризации динамики последовательного манипулятора посредством обратной связи. На основе геометрического уравнения движения строится закон управления моментами приводов с обратной связью по обобщённым координатам и скоростям. Для полностью приводного манипулятора при точном знании параметров модели и отсутствии внешних возмущений такой закон обеспечивает линейную динамику ошибки слежения. Это позволяет задавать скорость сходимости ошибки к нулю выбором коэффициентов регулятора.

Эффективность таких методов управления во многом определяется тем, насколько точно математическая модель описывает нелинейную динамику манипулятора, подлежащую компенсации. На практике значения масс, моментов инерции и других динамических параметров манипулятора могут быть известны с погрешностями либо изменяться в процессе эксплуатации, например при перемещении полезной нагрузки. Поэтому актуальной является разработка адаптивных систем траекторного управления, способных учитывать параметрическую неопределённость и корректировать управляющие воздействия в процессе функционирования механической системы.

Таким образом, актуальность диссертационного исследования определяется необходимостью развития геометрических методов математического моделирования последовательных роботов-манипуляторов, исследования возможностей точной линеаризации их нелинейной динамики и разработки адаптивных алгоритмов траекторного управления, обеспечивающих повышение точности воспроизведения заданных траекторий в условиях неопределённости параметров объекта управления.

Диссертационная работа выполнена в рамках реализации двух научно-исследовательских проектов, финансируемых за счёт грантовых средств Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (КН МНВО РК):

- № AP19679327 «Методы машинного обучения в задачах автоматического управления и инерциальной навигации мобильных роботов», реализуемого по приоритетному направлению «Информационные, коммуникационные и космические технологии», подприоритету «Интеллектуальные робототехнические системы»;

- № AP13068317 «Разработка новых алгоритмов управления роботом-манипулятором для технологий 3D-сканирования и аддитивного микроплазменного напыления покрытий».

Исследования по указанным проектам охватывали математическое моделирование робототехнических систем, разработку и анализ алгоритмов управления. Отдельное внимание уделялось методам планирования траекторий роботов-манипуляторов и обеспечения точности их отслеживания. Полученные в рамках данных исследований результаты послужили основой для решения научных задач, рассматриваемых в диссертационной работе.

Объектом исследования является последовательный манипулятор с поворотными сочленениями, управляемый крутящими моментами приводов.

Предметом исследования являются математические модели динамики последовательных роботов-манипуляторов, геометрические свойства их конфигурационного пространства, методы точной линеаризации нелинейных динамических систем, а также методы и алгоритмы адаптивного траекторного управления манипуляторами в условиях параметрической неопределённости.

Цель исследования: исследование геометрически обоснованных методов математического моделирования и точной линеаризации динамики последовательного робота-манипулятора, а также построение на их основе адаптивной системы траекторного управления, обеспечивающей воспроизведение заданных траекторий движения в условиях неопределённости динамических параметров объекта управления.

Задачи исследования:

1. Провести анализ существующих методов математического моделирования динамики последовательных роботов-манипуляторов, методов точной линеаризации нелинейных систем и адаптивного траекторного управления, определить их особенности, преимущества и ограничения.
2. Разработать геометрическое описание кинематики последовательного робота-манипулятора с использованием аппарата групп и алгебр Ли для определения конфигураций и скоростей его звеньев.
3. Представить конфигурационное пространство манипулятора как риманово многообразие с метрикой, определяемой кинетической энергией, и получить аналитические выражения для вычисления метрического тензора по геометрическим и инерционным характеристикам звеньев.
4. Построить динамическую модель последовательного робота-манипулятора на римановом многообразии с учётом геометрической структуры его конфигурационного пространства и действующих управляющих моментов.
5. Разработать процедуру точной линеаризации уравнений динамики последовательного манипулятора посредством обратной связи по обобщённым координатам и скоростям и на её основе построить систему траекторного управления.
6. Разработать систему адаптивного траекторного управления последовательным роботом-манипулятором на основе линеаризации нелинейной динамики обратной связью, исследовать условия её устойчивости и свойства ошибки слежения при неопределённости динамических параметров объекта управления.
7. Выполнить компьютерное моделирование разработанных алгоритмов управления, исследовать точность воспроизведения заданных траекторий,

влияние неопределённости динамических параметров и внешних возмущений на качество управления, а также провести сравнительный анализ полученных результатов.

Основные методы исследования: методы теории автоматического управления, методы теории групп и алгебр Ли, аналитической механики, римановой геометрии, метод Ляпунова, компьютерное моделирование в MATLAB/Simulink.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Геометрическая модель динамики последовательного манипулятора, основанная на представлении его конфигурационного пространства как риманова многообразия с метрикой, определяемой кинетической энергией.
2. Метод траекторного управления последовательным манипулятором, основанный на точной линеаризации его нелинейной динамики посредством обратной связи.
3. Адаптивно-робастный алгоритм траекторного управления последовательным манипулятором на основе точной линеаризации и адаптивной робастной коррекции, эффективность которого при параметрической неопределённости и внешних возмущениях подтверждена компьютерным моделированием.

Научная новизна работы заключается в том, что:

Представлена модель динамики последовательного манипулятора на римановом многообразии. Конфигурационное пространство манипулятора рассматривается как гладкое многообразие с заданной на нём метрикой, физически интерпретируемой как тензор кинетической энергии манипулятора. Впервые уравнение динамики манипулятора сформулировано в бескоординатной форме с использованием ковариантного дифференцирования на римановом многообразии. Впервые в рамках разработанной модели обобщённые скорости, силы и импульсы представлены в единой векторной форме. Обобщённая скорость является вектором касательного пространства, а ковекторам обобщённых сил и импульсов посредством метрики сопоставлены векторы того же пространства. В такой форме уравнение динамики манипулятора выражает формальную аналогию со вторым законом Ньютона для материальной точки.

Предложена оригинальная процедура точной линеаризации уравнений динамики последовательного манипулятора, записанных в геометрической форме на римановом многообразии. Процедура реализуется посредством обратной связи по обобщённым координатам и скоростям манипулятора.

Разработан новый метод адаптивно-робастного траекторного управления последовательным манипулятором, основанный на точной линеаризации геометрических уравнений динамики и адаптивной настройке коэффициентов робастной коррекции для каждого сочленения.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были представлены, доложены и обсуждены на трёх международных научно-технических конференциях:

1. VIII Международная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана», апрель 2022 г., г. Усть-Каменогорск, Казахстан;

2. 18th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2023), 16 ноября 2023 г., г. Секешфехервар, Венгрия;

3. X Международная научно-техническая конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана», посвящённая 125-летию Каныша Сатпаева, апрель 2024 г., г. Усть-Каменогорск, Казахстан.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 8 научных работ, в том числе 1 статья в международном рецензируемом научном журнале, индексируемом в базах данных Scopus (квартиль Q1) и Web of Science Core Collection (квартиль Q2), 4 статьи в научных изданиях, рекомендуемых уполномоченным органом в области науки и высшего образования Республики Казахстан, и 3 публикации в материалах международных научных конференций. Кроме того, получено 1 свидетельство о государственной регистрации объекта авторского права на программу для ЭВМ.

Диссертация имеет практическое значение:

- результаты исследования внедрены в учебный процесс ВКТУ им. Д. Серикбаева в образовательную программу 7М07101 «Автоматизация и управление», используются для преподавания дисциплины «Адаптивное управление роботом-манипулятором» (Акт о внедрении научно-исследовательской работы в учебный процесс от 28.02.2024 г.).

- для внедрения в практику предлагается программа для ЭВМ «Восстановление поверхности по данным сканирования» (авторы Кадыролдина А.Т., Құсайын-Мұрат Ә.Т., **Толыкбаева М.Б.**). Сведения о правах внесены в Государственный реестр прав на объекты, охраняемые авторским правом, что подтверждается свидетельством № 38548 от 21 августа 2023 года.

Личный вклад автора заключается в постановке научных задач исследования, разработке и исследовании математических моделей последовательного робота-манипулятора, применении геометрических методов для описания его кинематики и динамики, исследовании методов точной линеаризации нелинейных динамических систем и разработке алгоритмов адаптивного траекторного управления. Автором выполнены аналитические расчёты и компьютерное моделирование, проведён анализ полученных результатов, сформулированы основные научные выводы и положения, выносимые на защиту. Личный вклад автора также включает участие в подготовке научных публикаций, представлении результатов исследования на международных научных конференциях и внедрении результатов диссертационной работы в образовательный процесс.

1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ

1.1 Современные роботы-манипуляторы как объекты управления

Современный этап развития робототехники характеризуется интенсивным совершенствованием робототехнических систем, расширением областей их применения и повышением требований к точности, быстродействию и надёжности выполняемых технологических операций. Одно из центральных мест среди робототехнических устройств занимают роботы-манипуляторы, предназначенные для выполнения пространственных перемещений рабочего инструмента в соответствии с заданными законами движения [1].

Роботы-манипуляторы широко используются в промышленном производстве при выполнении сварочных, сборочных, транспортных и погрузочно-разгрузочных операций, механической обработке материалов, нанесении покрытий, а также в медицинских и исследовательских робототехнических системах. Разнообразие выполняемых задач обусловливает необходимость применения различных конструктивных схем, типов приводов и алгоритмов управления, обеспечивающих требуемые характеристики движения рабочего инструмента [2].

Роботы-манипуляторы занимают важное место в современной робототехнике благодаря широкому кругу задач, которые они решают в различных сферах деятельности [3].

Промышленность традиционно является основной областью применения роботов-манипуляторов. Промышленные роботы-манипуляторы являются наиболее зрелым и широко используемым типом промышленных роботов, поскольку они способны выполнять сборку, сварку, окраску и другие повторяемые операции, имитируя движения человеческой руки [4]. Как отмечает Уррея, промышленные роботы-манипуляторы становятся центральной частью архитектуры Industry 4.0, интегрируясь с IoT, кибер-физическими производственными системами и системами визуального контроля, что обеспечивает повышение скорости, точности и адаптивности современных производственных процессов [5]. По данным Куатовой и др. роботы-манипуляторы в промышленности всё чаще используются для выполнения тяжёлых, опасных и высокоточных операций, заменяя человека в условиях повышенного риска и снижая вероятность аварий, связанных с человеческим фактором [6].

Применение роботов-манипуляторов в аддитивном производстве в последние годы активно расширяется, что связано с ростом задач крупномасштабной печати, усложнением геометрии объектов и требованием гибких производственных систем [7]. В статье [8] Алварес и др. отмечают, что интеграция промышленного робота с FDM-экструдером позволяет реализовать свободно-форменное аддитивное производство, обеспечивая значительно большую гибкость процесса и расширенные производственные возможности по сравнению с традиционными настольными FDM-системами. Согласно

исследованию Фрейтас и др. [9] использование промышленного манипулятора с шестью степенями свободы открывает возможность непланарного формирования слоёв в крупногабаритном аддитивном производстве, и демонстрируют, что генерация наклонных траекторий с помощью Rhinoceros/Grasshopper позволяет существенно упростить процесс подготовки G-кода и повысить гибкость задания траектории, недоступную для традиционных портальных 3D-принтеров.

Пикоцци и др. в обзорной статье [10] показывают, что роботизированные системы, включая роботов-манипуляторов, активно внедряются в медицину и применяются в хирургии, реабилитации, телемедицине, больничной логистике, дезинфекции и социальной поддержке пациентов, существенно повышая качество и безопасность медицинской помощи. Согласно обзору Рагуса и др. [11] роботизированные микроманипуляционные системы обеспечивают микрометровую точность, позволяя выполнять операции интраокулярной хирургии, манипуляции в узких анатомических пространствах, процедуры, требующие подавления дрожания руки хирурга и масштабирования движений, которые выходят за пределы человеческих возможностей, что делает их незаменимыми в биомедицине и клинической микроскопической хирургии. В работе [12] авторы представляют реализацию жестового управления и передачу визуальной информации в реальном времени, демонстрирующего возможность безопасного дистанционного выполнения медицинских операций.

Роботизированные манипуляторы являются фундаментальным компонентом архитектуры орбитальных миссий, поскольку обеспечивают выполнение технологически сложных и критически значимых операций, включающих инспекцию, ремонт, дозаправку и модернизацию спутников, а также захват и удаление космического мусора и обслуживание орбитальной инфраструктуры [13]. Перспективы развития космической робототехники связаны с внедрением комплаентных и мягких манипуляторных систем, которые благодаря повышенной адаптивности и безопасному взаимодействию с хрупкими и некооперативными объектами в микрогравитации расширяют функциональные возможности будущих сервисных и исследовательских миссий [14].

Авторы работы [15] подчёркивают, что применение роботов-манипуляторов в аграрном секторе обусловлено одновременным ростом потребности в продуктах питания и снижением доступности трудовых ресурсов, что требует создания устойчивых и интеллектуальных систем управления для работы в неструктурированных условиях полей и теплиц. Фонтани и др в статье [16] отмечают, что эффективная автоматизация сельского хозяйства требует человеко-центрированных роботизированных систем, которые воспроизводят опыт и поведение работников, объединяя манипуляторы для сбора урожая, интеллектуальные системы опрыскивания, автономные мобильные платформы и мультиагентные роботизированные комплексы для работы в реальных неструктурированных агросредах. В исследовании Линфорда и Хагшенас-Джарьяни [17] представлена мобильная робототехническая система для мониторинга сельскохозяйственных культур и состояния почвы. Робот оснащён

шестизвенным манипулятором, камерами и датчиками, позволяющими получать изображения растений, а также измерять влажность и температуру почвы. Использование системы технического зрения позволяет определять наклон поверхности и корректировать положение рабочего органа при установке измерительного датчика. Предложенная система расширяет возможности применения роботизированных комплексов в задачах точного земледелия и мониторинга сельскохозяйственных угодий.

В зависимости от структуры кинематической цепи роботы-манипуляторы подразделяются на последовательные, параллельные и гибридные. Последовательный манипулятор представляет собой механическую систему, образованную последовательно соединёнными звеньями, относительное перемещение которых осуществляется посредством кинематических сочленений [18,19]. Такая структура обеспечивает возможность формирования сложных пространственных движений рабочего инструмента и широко применяется при проектировании промышленных робототехнических систем.

С математической точки зрения последовательный робот-манипулятор является многомерной нелинейной динамической системой, состояние которой определяется обобщёнными координатами и скоростями сочленений. Движение каждого звена зависит от перемещений предшествующих звеньев, а динамическое взаимодействие между ними обусловлено распределением масс, моментами инерции, геометрическими параметрами и действующими силами [20, 21].

Булло и др. в исследовании [22] выделяют тенденцию возрастания сложности динамического поведения манипулятора с увеличением числа степеней свободы, расширением диапазона рабочих скоростей и повышением требований к точности воспроизведения заданных траекторий. При этом существенное влияние на качество управления оказывают неопределённость параметров механической системы, изменение полезной нагрузки, неучтённые динамические воздействия и погрешности математической модели.

Характеристики системы управления манипулятором во многом зависят от того, каким образом формируются управляющие воздействия в его сочленениях. Спонг в работе [23] отмечает, что в зависимости от типа приводов и структуры системы регулирования можно выделить позиционное, скоростное и моментное управление.

При позиционном управлении основная задача заключается в обеспечении заданных значений обобщённых координат сочленений. Регуляторы формируют управляющие воздействия в соответствии с отклонением фактического положения от требуемого [24]. Такой подход широко применяется в промышленных роботах, для которых характерно использование электроприводов со встроенными контурами положения и скорости.

Скоростное управление предполагает формирование управляющих воздействий, обеспечивающих воспроизведение заданных скоростей движения сочленений [25]. Оно используется как самостоятельно, так и в составе многоуровневых систем управления, включающих внутренние контуры

регулирования приводов и внешние контуры управления движением рабочего инструмента.

В исследовании [26] Там и др. описывают моментное управление, в отличие от позиционного и скоростного, которое предполагает непосредственное формирование требуемых обобщённых сил или моментов в сочленениях манипулятора. При таком подходе объектом управления выступает механическая система с учётом её динамических характеристик, а управляющие воздействия определяются на основе уравнений движения.

Применение моментного управления описано в работе Галарсе-Асеведо и соавторов, оно позволяет реализовывать алгоритмы, непосредственно учитывающие нелинейные динамические свойства манипулятора. К числу таких алгоритмов относятся методы вычисляемых моментов, линеаризации обратной связью, адаптивного и робастного управления [27].

При этом применение моментного управления предъявляет повышенные требования к математической модели манипулятора [28, 29]. Для формирования управляющих воздействий необходимо учитывать зависимость динамических характеристик от текущей конфигурации, взаимодействие движений отдельных сочленений и внешние воздействия на механическую систему.

В задачах траекторного управления требуется обеспечить воспроизведение заранее заданного закона изменения обобщённых координат либо положения и ориентации рабочего инструмента. В отличие от задач позиционирования, в которых основным требованием является достижение конечной конфигурации, траекторное управление предполагает непрерывное согласование фактического движения с заданной траекторией на рассматриваемом временном интервале.

Задача траекторного управления приобретает особую значимость при выполнении технологических операций, требующих соблюдения заданной скорости перемещения рабочего инструмента, его ориентации и пространственного положения относительно обрабатываемого объекта.

В работе А. Кусайын-Мурат и соавторов [30] рассмотрена задача автоматического планирования траектории движения рабочего инструмента промышленного робота-манипулятора при микроплазменном напылении покрытий. На этапе сканирования датчик измеряет расстояние до поверхности плиты в различных точках (рисунок 1.1, a). По результатам измерений восстанавливают трёхмерную модель поверхности (рисунок 1.1, b). На основе этой модели с использованием методов дискретного внешнего исчисления и функции геодезического расстояния строят траекторию рабочего инструмента и формируют управляющую программу манипулятора. В ходе эксперимента робот-манипулятор перемещал микроплазмотрон по рассчитанной траектории (рисунок 1.1, c). На микрофотографии поперечного сечения видно, что полученное покрытие на основе хрома имеет равномерную толщину на представленном участке (рисунок 1.1, d). В рассмотренной задаче геометрия поверхности определяет траекторию рабочего инструмента, а точность её воспроизведения зависит от системы управления движением манипулятора.

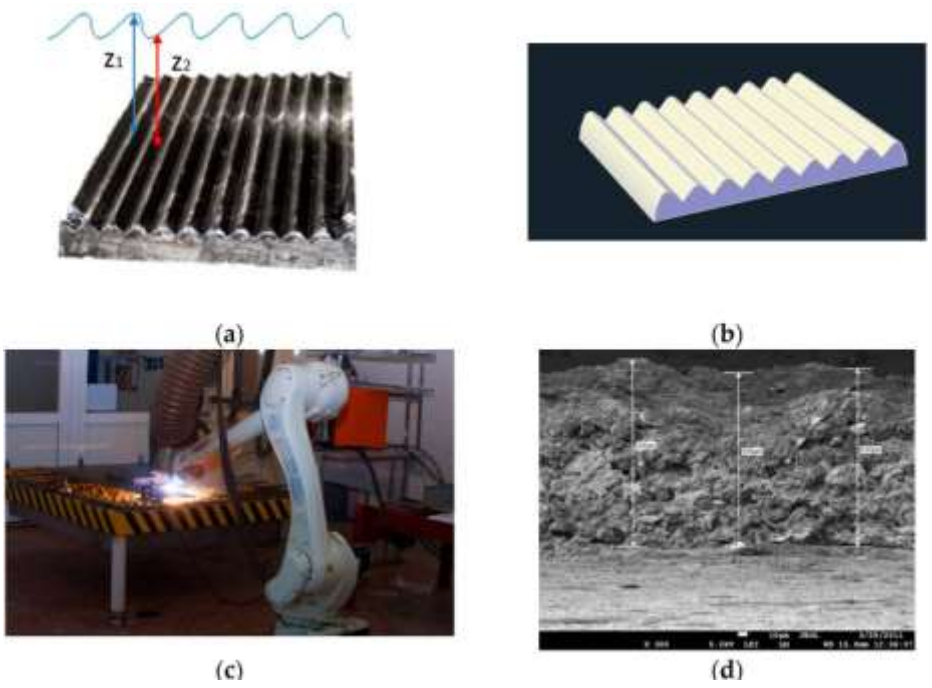

Рисунок 1.1 – Этапы роботизированного микроплазменного напыления и полученное покрытие

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [30, p. 25]

В работе А. Красавина и соавторов [31] рассмотрена задача восстановления поверхности объекта на основе данных трёхмерного сканирования. Исследование относится к направлению применения методов обработки пространственных данных в роботизированных технологических процессах. Восстановление геометрии поверхности представляет важный этап подготовки операций, связанных с автоматизированной обработкой объектов сложной формы, поскольку полученная геометрическая информация может использоваться при последующем планировании движения рабочего инструмента робота-манипулятора. Таким образом, исследования [30, 31] отражают взаимосвязь задач трёхмерного сканирования, обработки геометрических данных и планирования траекторий движения робототехнических систем.

В рамках классической теории управления одним из подходов к решению данной задачи является компенсация нелинейных составляющих динамической модели посредством обратной связи [32]. Такие методы позволяют преобразовать уравнения замкнутой системы к форме, удобной для синтеза регуляторов, однако их эффективность зависит от точности используемых математических моделей.

В условиях неопределённости динамических параметров манипулятора применение фиксированной модели может приводить к неполной компенсации нелинейных составляющих и увеличению ошибок воспроизведения заданной траектории. Данное обстоятельство обусловливает необходимость исследования

адаптивных методов управления, способных учитывать изменения характеристик объекта в процессе его функционирования [33].

Таким образом, последовательный робот-манипулятор с управлением моментами представляет собой сложный нелинейный многомерный объект управления, для которого характерны взаимосвязанность движений сочленений, зависимость динамических характеристик от конфигурации и чувствительность к неопределённости параметров. Разработка эффективных систем траекторного управления такими объектами требует построения математических моделей, отражающих их динамические свойства, исследования методов преобразования нелинейных уравнений движения и применения адаптивных алгоритмов управления [34].

Проведённый анализ современных направлений развития робототехники показал, что последовательные роботы-манипуляторы находят широкое применение в промышленности, медицине, аддитивном производстве и других областях, требующих высокой точности и надёжности выполнения технологических операций. Расширение сферы их применения сопровождается повышением требований к динамическим характеристикам, точности воспроизведения заданных траекторий и адаптивности систем управления.

Установлено, что применение моментного управления позволяет непосредственно учитывать динамические свойства механической системы и создаёт предпосылки для реализации современных алгоритмов нелинейного и адаптивного управления. Вместе с тем взаимосвязанность движений звеньев, нелинейный характер динамики и неопределённость параметров математической модели существенно усложняют разработку эффективных систем управления последовательными манипуляторами.

Таким образом, дальнейшее совершенствование систем траекторного управления требует исследования динамических особенностей последовательных роботов-манипуляторов и разработки методов управления, обеспечивающих требуемую точность движения в условиях параметрической неопределённости. Указанные особенности и связанные с ними проблемы рассматриваются в следующем разделе диссертационной работы.

1.2 Особенности и проблемы управления последовательными роботами-манипуляторами

Последовательные роботы-манипуляторы относятся к классу многомерных электромеханических систем с нелинейной динамикой. Управление такими системами осложняется взаимным влиянием движений звеньев, неопределённостью параметров модели и действием внешних возмущений. Указанные особенности существенно усложняют обеспечение высокой точности и устойчивости траекторного управления.

В обзорной работе Тиноко и соавторов [35] проведён сравнительный анализ современных методов управления роботами-манипуляторами, включая адаптивные, робастные, скользящие, прогнозирующие и интеллектуальные алгоритмы. Авторы отмечают, что выбор метода определяется динамическими характеристиками объекта, условиями эксплуатации, требованиями к точности и

вычислительной сложностью регулятора. Особый интерес представляют адаптивные подходы, обеспечивающие корректировку параметров управления при изменении характеристик системы.

Мастары и соавторы [36] рассматривают проблемы устойчивости манипуляторов, обусловленные неопределённостью массово-инерционных параметров, влиянием трения и погрешностями математической модели. Авторы подчёркивают необходимость учёта указанных факторов при разработке систем управления, функционирующих в изменяющихся условиях эксплуатации.

Одной из основных особенностей последовательных манипуляторов является динамическая взаимосвязь сочленений, вследствие которой движение одного звена влияет на характеристики всей механической системы. При этом матрица инерции зависит от текущей конфигурации, а движение сопровождается кориолисовыми, центробежными и гравитационными воздействиями. Особенно заметно влияние этих факторов при высоких скоростях движения.

Нелинейность и взаимосвязанность динамики ограничивают эффективность традиционных линейных регуляторов с постоянными коэффициентами, поскольку их применение не всегда обеспечивает одинаковое качество управления во всём рабочем диапазоне. Это обусловливает необходимость использования методов компенсации нелинейной динамики и адаптации управляющих воздействий к изменяющимся условиям функционирования манипулятора.

В работе Чен и соавторов [37], исследована задача обеспечения заданных характеристик траекторного управления многозвенными роботами-манипуляторами в условиях неопределённости динамических параметров и влияния трения. Предложен метод управления, ориентированный на достижение предписанных показателей качества отслеживания траектории без необходимости точного знания всех параметров динамической модели. Исследование демонстрирует значимость учёта неопределённости механических характеристик при синтезе алгоритмов высокоточного управления.

Особую сложность представляет определение динамических параметров последовательного манипулятора. Для построения достаточно точной математической модели необходимо располагать сведениями о массах звеньев, координатах их центров масс, тензорах инерции, характеристиках приводов и силах сопротивления движению. На практике значения указанных параметров могут быть определены лишь приближённо вследствие погрешностей измерения, особенностей конструктивного исполнения и изменения условий эксплуатации.

Дополнительным источником неопределённости является изменение полезной нагрузки рабочего инструмента. При захвате, транспортировке или освобождении объекта изменяется распределение масс механической системы, что приводит к изменению инерционных характеристик и требуемых управляющих моментов. Вследствие этого регулятор, настроенный для одной конфигурации нагрузки, может обеспечивать менее точное воспроизведение заданной траектории при изменении массы и положения перемещаемого объекта.

В исследовании Фю и соавторов [38] рассмотрена задача высокоточного траекторного управления роботами-манипуляторами при наличии нелинейных динамических воздействий, параметрической неопределённости, ограничений состояния и насыщения управляющих воздействий. Авторами предложена схема, сочетающая адаптивное робастное управление с оптимизационным формированием задающих сигналов. Эффективность подхода исследована экспериментально на роботе-манипуляторе Франка. Полученные результаты показывают необходимость совместного учёта требований к точности движения и физических ограничений исполнительной системы.

Наряду с параметрической неопределённостью существенное влияние на функционирование последовательных манипуляторов оказывают внешние возмущения. К ним относятся контактные силы, возникающие при взаимодействии рабочего инструмента с обрабатываемым объектом, изменения сопротивления технологической среды, неучтённые нагрузки и другие воздействия, непосредственно влияющие на динамику механической системы.

В отличие от ошибок определения постоянных параметров модели, внешние возмущения могут изменяться во времени и носить сложный характер. Их возникновение приводит к отклонению фактического движения от заданной траектории, а в отдельных случаях к повышению колебательности системы и увеличению управляющих моментов.

Яваид и соавторы [39] рассмотрели задачу робастного траекторного управления манипулятором в условиях параметрической неопределённости и нелинейных характеристик исполнительных механизмов. Авторами предложен подход к обеспечению сходимости ошибки слежения за конечное время. Постановка и результаты исследования подтверждают актуальность совместного учёта неопределённости динамики объекта и особенностей приводной системы при разработке алгоритмов траекторного управления.

Существенным ограничением систем управления манипуляторами являются физические возможности исполнительных механизмов, включая предельные значения управляющих моментов, скоростей и ускорений. Превышение допустимых значений приводит к насыщению приводов, увеличению ошибок слежения и ухудшению динамических характеристик системы. Особенно важно учитывать данные ограничения при моментном управлении, поскольку рассчитанные управляющие воздействия должны соответствовать реальным возможностям приводной системы.

Сараива и соавторы [40] провели сравнительный анализ методов управления роботами-манипуляторами, включая метод вычисляемых моментов, скользящее управление и управление на основе внутренней модели. Исследование показало, что эффективность регуляторов определяется не только точностью отслеживания траектории, но и величиной управляющих воздействий и сложностью реализации.

При этом компенсация нелинейной динамики существенно зависит от точности математической модели, а параметрические неопределённости и внешние возмущения могут приводить к увеличению ошибок слежения. Это обусловливает необходимость применения адаптивных и робастных методов

управления, обеспечивающих устойчивость и требуемую точность движения в условиях неопределённости.

В работе Ортиз-Ортиз и соавторов [41] предложен алгоритм траекторного управления манипулятором на основе непрерывного интегрального скользящего режима с учётом насыщения управляющих воздействий. Алгоритм предназначен для отслеживания заданной траектории при неопределённости динамических параметров и действии внешних возмущений. Структура системы управления представлена на рисунке 1.2. В блоке обратной кинематики (Inverse Kinematics) по заданной траектории рабочего инструмента определяются требуемые положения, скорости и ускорения сочленений. Номинальный регулятор (Nominal Control) формирует основную составляющую управляющего момента. По отклонениям фактических положений и скоростей сочленений от заданных вычисляется виртуальная переменная скольжения (Virtual Sliding Variable). На её основе регулятор непрерывного интегрального скользящего режима с насыщением (SCISM Controller) формирует корректирующий момент, который суммируется с номинальным.

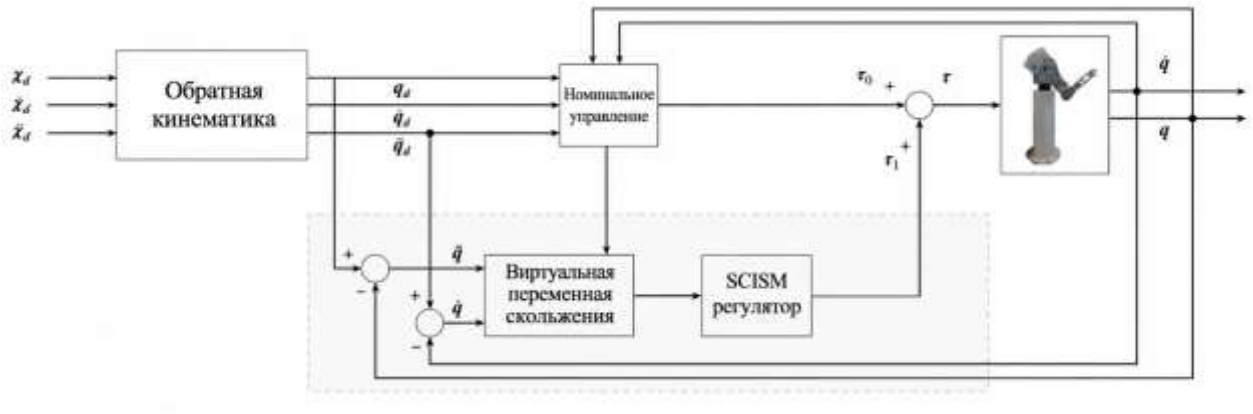

Рисунок 1.2 – Структурная схема системы траекторного управления манипулятором на основе непрерывного интегрального скользящего режима с учётом ограничений управляющих воздействий

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [41, p. 110]

Таким образом, основные проблемы управления последовательными роботами-манипуляторами обусловлены нелинейностью и взаимосвязанностью динамики звеньев, неопределённостью инерционных параметров, изменением полезной нагрузки, внешними возмущениями и ограничениями исполнительных механизмов. Указанные факторы затрудняют обеспечение точности и устойчивости траекторного управления традиционными линейными методами.

Анализ исследований показывает необходимость развития двух взаимосвязанных направлений: математического моделирования и линеаризации нелинейной динамики манипуляторов, а также разработки адаптивных алгоритмов управления, учитывающих параметрическую неопределённость и внешние воздействия. Это определяет актуальность

дальнейшего исследования методов траекторного управления, рассматриваемых в следующем разделе.

Проведённый анализ показал, что основные проблемы управления последовательными роботами-манипуляторами связаны с нелинейностью динамики, параметрической неопределённостью, внешними возмущениями и ограничениями исполнительных механизмов. Эффективность существующих методов во многом зависит от точности математической модели и способности системы управления адаптироваться к изменяющимся условиям.

Перспективным направлением является сочетание геометрических методов моделирования, точной линеаризации нелинейной динамики и адаптивного траекторного управления. Это обусловливает необходимость дальнейшего анализа существующих методов управления, их преимуществ и ограничений, представленного в следующем разделе.

1.3 Анализ существующих методов траекторного управления роботами-манипуляторами

Траекторное управление роботами-манипуляторами направлено на точное воспроизведение заданного закона движения рабочего инструмента или сочленений во времени. В отличие от позиционного управления, оно предполагает непрерывное согласование фактических координат, скоростей и ускорений с заданными значениями, что особенно важно при выполнении сварочных операций, механической обработки, нанесения покрытий и трёхмерного сканирования.

Основные сложности траекторного управления обусловлены нелинейностью динамики манипуляторов, кинематическими ограничениями, параметрической неопределённостью и внешними возмущениями. Для решения данных задач применяются линейные, модельно-ориентированные, робастные, прогнозирующие и интеллектуальные методы управления, различающиеся принципами формирования управляющих воздействий и способами компенсации неопределённостей.

Одним из распространённых модельно-ориентированных подходов является метод вычисляемых моментов (Computed Torque Control, CTC), основанный на компенсации инерционных, кориолисовых, центробежных и гравитационных составляющих динамики манипулятора. Данный метод относится к линеаризации обратной связью и при достаточно точной математической модели позволяет преобразовать нелинейную динамику в форму, удобную для применения линейных методов управления. Однако его эффективность существенно зависит от точности определения динамических параметров объекта.

В исследовании Ю. Ли и соавторов [42] рассмотрена задача идентификации динамических параметров и высокоточного траекторного управления космическим роботом-манипулятором. Авторы предложили подход, объединяющий идентификацию параметров, прогнозирующее управление и линеаризацию обратной связью. Дополнительно использован расширенный наблюдатель состояния для повышения качества управления. Эффективность

предложенного решения исследована посредством компьютерного моделирования и экспериментальной проверки.

Структурная схема предложенной системы управления представлена на рисунке 1.3. Эффективность метода подтверждена моделированием семизвенного манипулятора и экспериментальными исследованиями двухзвенного манипулятора. Результаты показали повышение точности отслеживания заданной траектории по сравнению с традиционными методами управления.

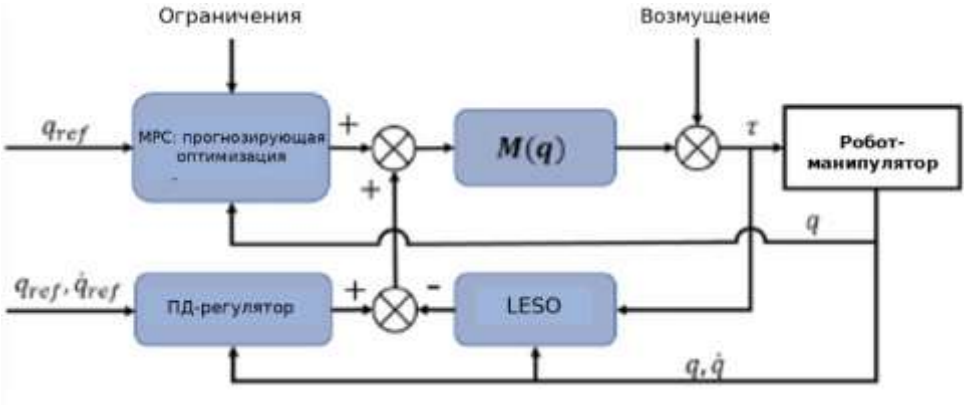

Рисунок 1.3 – Структурная схема системы прогнозирующего управления с линейным наблюдателем расширенного состояния

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [42, p. 485]

Работа Ли и соавторов показывает, что линеаризация динамической модели может использоваться не только как самостоятельный метод синтеза регулятора, но и как основа для построения более сложных систем управления, включающих механизмы прогнозирования и компенсации возмущений.

В исследовании Ю. Ян и соавторов [43] предложена иерархическая система траекторного управления манипулятором, объединяющая компенсацию нелинейной динамики с робастным прогнозирующим управлением и наблюдателем возмущений. Предложенный подход предусматривает линеаризацию динамики ошибки слежения с последующим применением прогнозирующего регулятора, учитывающего ограничения системы. Это позволяет снизить вычислительную сложность и повысить устойчивость к внешним возмущениям.

Для преодоления ограничений модельно-ориентированных регуляторов применяются робастные методы, обеспечивающие устойчивость и требуемое качество управления при параметрической неопределённости, погрешностях математической модели и ограниченных внешних воздействиях.

Одним из распространённых робастных подходов является управление в скользящем режиме (Sliding Mode Control, SMC), основанное на формировании управляющих воздействий, обеспечивающих достижение заданной поверхности скольжения и последующее движение вдоль неё. Применение данного метода позволяет снизить влияние неопределённостей и внешних возмущений на

точность воспроизведения заданной траектории манипулятора.В исследовании Ху и др. [44] предложен адаптивный метод траекторного управления в быстром терминальном скользящем режиме без сингулярностей, дополненный компенсацией динамических воздействий на основе модели. Метод разработан для роботизированной системы с гармоническими редукторами, функционирующей в условиях изменения нагрузки. Авторами предусмотрены оценивание нагрузочных моментов и компенсация трения. Полученные экспериментальные результаты показывают снижение ошибок траекторного управления по сравнению с рассмотренными в работе базовыми алгоритмами.

В работе Ю. Чэня и соавторов [45] исследовано траекторное управление манипулятором в условиях неопределённости с использованием терминального скользящего режима и наблюдателя возмущений. Авторами предложена структура управления, обеспечивающая сходимость ошибки слежения за фиксированное время при выполнении принятых математических условий. Использование наблюдателя направлено на оценивание совокупного влияния неопределённых динамических составляющих и внешних воздействий.

Б. Су [46] в исследовании 2025 года рассмотрел задачу управления траекторией рабочего инструмента манипулятора с использованием робастного скользящего режима. Автором построена динамическая модель движения рабочего инструмента в декартовом пространстве и предложен закон управления, ориентированный на повышение точности слежения и устойчивости к возмущениям. На рисунке 1.4 сопоставлены заданная и фактическая траектории рабочего инструмента.

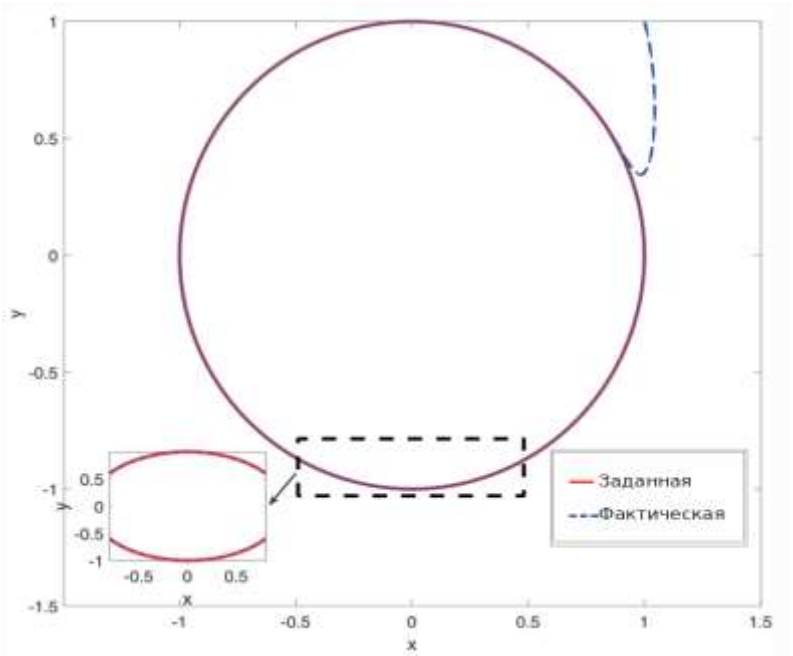

Рисунок 1.4 – Сравнение заданной и фактической траекторий движения рабочего инструмента манипулятора при робастном управлении со скользящим режимом

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [46, p. 17]

Анализ рассмотренных исследований показывает, что методы скользящего управления обеспечивают устойчивость и точность траекторного движения при ограниченных неопределённостях и внешних возмущениях. Однако применение разрывных управляющих воздействий может вызывать высокочастотные переключения, отрицательно влияющие на исполнительные механизмы. Для устранения данного недостатка используются непрерывные алгоритмы, скользящее управление более высокого порядка и адаптивные методы компенсации возмущений, применение которых сопровождается усложнением структуры регулятора и повышением вычислительных требований.

Другим перспективным направлением является прогнозирующее управление на основе модели (Model Predictive Control, MPC), предусматривающее определение управляющих воздействий путём оптимизации прогнозируемого поведения системы. Данный подход позволяет учитывать динамику манипулятора, ограничения сочленений и исполнительных механизмов, а также требования к точности воспроизведения заданной траектории.

В исследовании Ю. Вана и соавторов [47] предложен метод инкрементального прогнозирующего управления роботами-манипуляторами на основе экспериментальных данных. Для уменьшения зависимости регулятора от полной математической модели объекта использовано приближённое описание динамики, построенное на основе оценки с временной задержкой. Параметры модели корректируются с применением рекурсивного метода наименьших квадратов. Экспериментальные исследования трёхзвенного манипулятора продемонстрировали повышение точности слежения по сравнению с рассмотренными авторами альтернативными алгоритмами.

М. Цао и соавторы [48] исследовали задачу прогнозирующего управления положением и ориентацией рабочего инструмента избыточного манипулятора с неизвестными параметрами. Авторами предложен метод, основанный на использовании измеряемых данных и нейродинамических алгоритмов оценивания кинематических характеристик. Разработанная система позволяет учитывать ограничения обобщённых координат, скоростей и ускорений сочленений, а также оптимизировать характеристики движения рабочего инструмента.

В работе З. Момынкулова и соавторов [49] рассмотрена задача трёхмерного планирования траекторий манипулятора с использованием прогнозирующего управления и оптимизации на основе облаков точек. Авторы предложили подход к формированию траекторий, учитывающий ограничения положения, скорости и ускорения механической системы. Проведённое компьютерное моделирование показало возможность получения динамически допустимых траекторий при соблюдении заданных ограничений.

Следует отметить, что работа Момынкулова и соавторов преимущественно посвящена планированию траекторий, тогда как исследования Вана и Цао непосредственно рассматривают алгоритмы управления движением. Несмотря на различие постановок задач, указанные работы демонстрируют тенденцию к

объединению планирования движения, математического моделирования и управления в единой вычислительной структуре.

Основным преимуществом прогнозирующего управления является возможность непосредственного учёта ограничений состояния и управляющих воздействий. Однако практическая реализация таких методов требует многократного решения оптимизационных задач, что может сопровождаться значительными вычислительными затратами. Кроме того, точность прогнозирования зависит от качества используемой модели объекта.

Таким образом, методы MPC представляют интерес для сложных робототехнических систем, функционирующих в условиях ограничений, однако необходимость обеспечения вычислительной эффективности и устойчивости к неопределённости динамических параметров остаётся важной задачей.

Развитие вычислительных технологий и методов искусственного интеллекта обусловило широкое применение нейросетевых, нечётких и комбинированных алгоритмов в задачах управления роботами-манипуляторами.

Данные подходы используются для аппроксимации неизвестных нелинейных зависимостей, оценивания динамических воздействий, настройки параметров регуляторов и компенсации неопределённости математической модели.

В исследовании Я. Шэня [50] разработана система траекторного управления манипулятором на основе нечёткой нейронной сети. Для оптимизации параметров регулятора использовано сочетание алгоритма роя частиц и алгоритма обратного распространения ошибки. Структурная схема предложенной системы управления представлена на рисунке 1.5. Результаты моделирования показали высокую точность слежения, адаптивность и устойчивость системы к возмущениям.

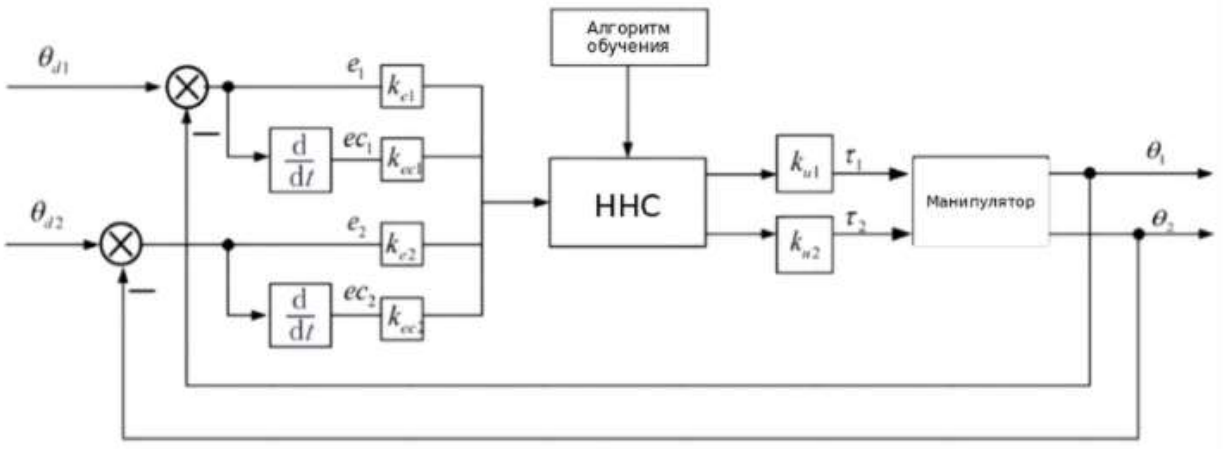

Рисунок 1.5 – Структурная схема системы траекторного управления роботом-манипулятором на основе нечёткой нейронной сети

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [50, p. 3]

Результаты, представленные автором, показывают возможности применения нейросетевых структур для повышения адаптивности и точности управления нелинейными робототехническими системами.

Для конкретизации взаимосвязи координат отдельных сочленений рассмотрим классическую модель плоского двухзвенного манипулятора, используемую, в частности, при исследовании нечёткого нейросетевого траекторного управления [50]. В рамках лагранжева описания динамика представляется матричным уравнением, связывающим обобщённые ускорения, скоростные и гравитационные воздействия с моментами приводов.

В работе А. Ауайшии и соавторов [51] исследован комбинированный подход, объединяющий нейросетевое прогнозирующее управление и активную компенсацию возмущений. Применение нейросетевой модели направлено на повышение качества прогнозирования динамики манипулятора, а дополнительный механизм компенсации возмущений предназначен для уменьшения влияния неопределённых воздействий на точность отслеживания заданной траектории.

Таким образом, анализ существующих методов траекторного управления последовательными роботами-манипуляторами выявил необходимость совместного учёта нелинейной динамики и параметрической неопределённости. Методы линеаризации обратной связью позволяют упростить синтез регуляторов, однако их эффективность существенно зависит от точности математической модели.

В связи с этим перспективным направлением является разработка систем траекторного управления, сочетающих точную линеаризацию нелинейной динамики с адаптивной компенсацией параметрических неопределённостей, что позволит повысить точность воспроизведения заданных траекторий и устойчивость системы при изменении условий функционирования.

Проведённый анализ существующих методов траекторного управления роботами-манипуляторами показал, что развитие современных алгоритмов направлено на повышение точности воспроизведения заданных траекторий, обеспечение устойчивости при неопределённости параметров, компенсацию внешних возмущений и учёт физических ограничений исполнительных механизмов.

Установлено, что методы управления, основанные на использовании динамической модели манипулятора, обладают существенными преимуществами при решении задач высокоточного воспроизведения заданных траекторий. В частности, метод вычисляемых моментов и линеаризация обратной связью позволяют компенсировать известные нелинейные составляющие динамики и упростить синтез системы управления. Однако эффективность данных подходов зависит от достоверности используемой математической модели.

Современные робастные, прогнозирующие и интеллектуальные методы позволяют частично преодолевать указанные ограничения, однако применение каждого из них связано с определёнными требованиями к структуре регулятора,

вычислительным ресурсам и условиям функционирования механической системы.

В результате анализа установлено, что исследование методов точной линеаризации нелинейной динамики последовательного манипулятора и разработка на их основе адаптивных систем траекторного управления представляют перспективное направление совершенствования алгоритмов управления робототехническими системами.

1.4 Современные подходы к адаптивному управлению роботами-манипуляторами

Адаптивное управление является перспективным направлением развития систем управления роботами-манипуляторами, функционирующими в условиях параметрической неопределённости, изменения полезной нагрузки и внешних возмущений. В отличие от регуляторов с постоянными коэффициентами, адаптивные алгоритмы предусматривают корректировку управляющих воздействий или оценок динамических параметров непосредственно в процессе движения, обеспечивая повышение точности воспроизведения заданных траекторий.

В обзорной работе [52] рассмотрены современные подходы к адаптивному управлению роботами-манипуляторами, включая системы с эталонной моделью, методы оценивания неизвестных параметров, адаптивное робастное управление и интеллектуальные алгоритмы. Особое внимание уделяется компенсации неопределённостей, связанных с массово-инерционными характеристиками, силами трения и изменением полезной нагрузки.

Одним из распространённых подходов является адаптивное управление с эталонной моделью (Model Reference Adaptive Control, MRAC), при котором параметры регулятора корректируются на основе отклонения фактического движения от заданной эталонной динамики. В исследовании Ә. Т. Құсайын-Мұрат и соавторов [53], выполненном с участием М. Б. Толыкбаевой, предложена система адаптивного управления двухзвенным манипулятором, объединяющая PID-регулирование и адаптацию на основе эталонной модели. Устойчивость исследована с использованием методов Ляпунова и гиперустойчивости, а эффективность оценена путём сравнения характеристик комбинированного и отдельных регуляторов.

В работе Ю. Туна и соавторов [33] рассмотрено адаптивное траекторное управление манипуляторами при одновременной неопределённости кинематических и динамических параметров. Предложенный подход позволяет снизить влияние погрешностей геометрической модели, неточностей в матрицах Якоби и неопределённости массово-инерционных параметров манипулятора на точность отслеживания заданной траектории при неполных сведениях об объекте управления.

В работе Нгуена и соавторов [54] предложена система адаптивного траекторного управления манипулятором, сочетающая нечёткую нейронную сеть и робастное управление в скользящем режиме (рисунок 1.6). По разности между заданными и фактическими координатами сочленений формируется

ошибка слежения e. Ошибка и её производная определяют переменную скольжения $s = \dot{e} + \lambda e$.

Нечёткая нейронная сеть (Fuzzy Neural Network) аппроксимирует неизвестные нелинейные составляющие динамики манипулятора. Законы адаптивной настройки параметров (Update laws) получены с использованием метода Ляпунова. Робастная составляющая управления (SMC robust term) уменьшает влияние погрешности аппроксимации и внешних возмущений (Disturbances) на точность слежения.

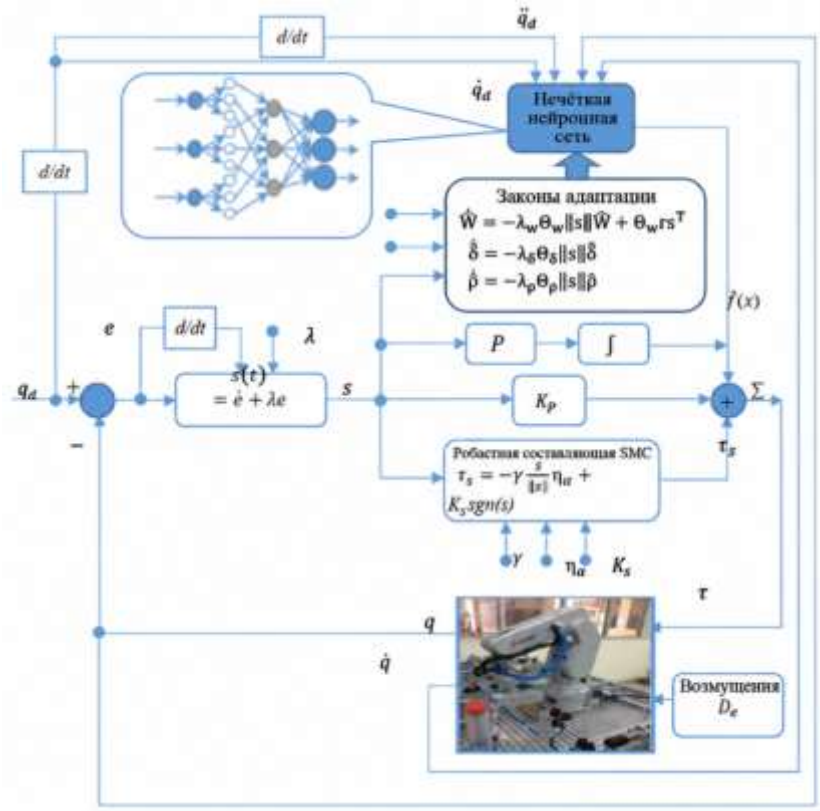

Рисунок 1.6 – Структурная схема робастной адаптивной системы траекторного управления манипулятором с нечёткой нейронной сетью

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [54, p. 492]

Одним из наиболее распространённых направлений современных исследований является объединение адаптивных алгоритмов с робастным управлением. Такие системы предназначены для компенсации неопределённых динамических воздействий и обеспечения устойчивости замкнутой системы при изменении параметров механической системы. Особое место среди них занимают адаптивные методы управления в скользящем режиме.

В исследовании М. Ци и соавторов [55] предложен адаптивный алгоритм траекторного управления жёсткими роботами-манипуляторами на основе интегрального скользящего режима. Разработанная система предусматривает автоматическую корректировку коэффициента управления в зависимости от возмущающих воздействий без необходимости точного знания их границ.

Авторами исследованы условия сходимости ошибки слежения за конечное время и устойчивости замкнутой системы на основе метода Ляпунова. Особое внимание уделено уменьшению высокочастотных переключений управляющего сигнала, характерных для классических методов скользящего управления.

Анализ указанного исследования показывает, что адаптивная настройка коэффициентов робастного регулятора позволяет уменьшить зависимость алгоритма управления от априорных оценок неопределённости. Вместе с тем эффективность подобных методов определяется выбранной поверхностью скольжения, структурой закона адаптации и условиями ограниченности неизвестных воздействий.

В работе Ш. Ху и соавторов [44], рассмотренной ранее в разделе 1.3, адаптивное управление в быстром терминальном скользящем режиме объединено с компенсацией динамических воздействий на основе модели. Предложенный подход ориентирован на повышение точности воспроизведения заданных траекторий при изменении полезной нагрузки и наличии нелинейных характеристик приводной системы. Результаты демонстрируют возможность повышения качества управления посредством совместного использования модельной компенсации и адаптивного робастного регулирования.

Таким образом, сочетание адаптивного и робастного управления позволяет учитывать как неопределённость динамических параметров, так и влияние внешних возмущений. Однако увеличение сложности алгоритмов требует дополнительного анализа устойчивости, вычислительных затрат и возможности реализации в реальном времени.

В последние годы значительное внимание уделяется использованию адаптивных методов управления совместно с нейросетевыми алгоритмами, позволяющими аппроксимировать неизвестные нелинейные составляющие динамики манипуляторов. Применение искусственных нейронных сетей в данном случае обусловлено возможностью приближённого представления сложных функциональных зависимостей без необходимости получения их полного аналитического описания.

В исследовании С. Яна и соавторов [56] предложен адаптивный алгоритм управления манипулятором на основе двух нейронных сетей и скользящего режима при неопределённости кинематических и динамических параметров. Для компенсации неизвестной кинематики использованы метод градиентного оценивания и рекуррентная нейронная сеть. Предложенная структура направлена на совместный учёт неопределённостей, возникающих при преобразовании координат и описании динамических свойств механической системы.

В работе Ч. Чжана и Чжао [57] исследована задача адаптивного управления манипулятором с упругими сочленениями с применением радиально-базисной нейронной сети и метода динамических поверхностей. Нейросетевая структура используется для аппроксимации неизвестных составляющих динамики объекта, тогда как дополнительный механизм нелинейного демпфирования направлен на снижение влияния внешних возмущений. Авторы рассматривают возможность

повышения точности управления в условиях неопределённости динамической модели и упругости механической системы.

Указанные исследования показывают, что нейросетевые методы могут использоваться как вспомогательный механизм адаптации, расширяющий возможности традиционных алгоритмов управления. Вместе с тем применение нейросетевых структур сопровождается необходимостью выбора их архитектуры, определения законов изменения весовых коэффициентов и исследования устойчивости замкнутой системы с учётом погрешностей аппроксимации.

Перспективным направлением является использование методов вероятностного оценивания неизвестной динамики роботов-манипуляторов. В отличие от детерминированных аппроксимирующих моделей, такие методы позволяют учитывать не только прогнозируемое значение неизвестной зависимости, но и меру неопределённости полученной оценки.

Ю. Жэнь и соавторы [58] предложили метод высокоточного траекторного управления роботом-манипулятором на основе разреженных онлайн-гауссовских процессов. Алгоритм предусматривает обновление модели неизвестной динамики на основе поступающих измерений и использование адаптивных коэффициентов обратной связи, зависящих от оценённой неопределённости. Результаты компьютерного моделирования двухзвенного манипулятора показали преимущества предложенного подхода в рассмотренных сценариях изменения полезной нагрузки и внешних воздействий по сравнению с выбранными авторами базовыми регуляторами.

Применение вероятностных моделей предоставляет дополнительные возможности для адаптации управляющих воздействий к изменяющимся условиям функционирования механической системы. Однако такие методы могут требовать значительных вычислительных ресурсов, а качество полученных оценок зависит от характеристик обучающих данных и выбранной модели.

Отдельное направление исследований связано с обеспечением заданных временных характеристик сходимости ошибки траекторного управления. В традиционных адаптивных системах часто рассматривается асимптотическая устойчивость, при которой ошибка управления стремится к нулю с течением времени. Вместе с тем при выполнении технологических операций может возникать необходимость обеспечения требуемой точности за ограниченный или заранее установленный промежуток времени.

В работе Ю. Ся и соавторов [59] предложен адаптивный метод управления роботами-манипуляторами с заданным временем сходимости и событийным механизмом формирования управляющих воздействий. Авторами использованы нейросетевые алгоритмы для компенсации неопределённости динамической модели, фильтрация командных сигналов и адаптивная оценка внешних возмущений. Дополнительно рассмотрен событийный механизм обновления управляющих воздействий, предназначенный для уменьшения нагрузки на коммуникационные ресурсы системы. Эффективность подхода подтверждена результатами компьютерного моделирования.

Развитие таких методов имеет значение для робототехнических систем, в которых одновременно предъявляются требования к быстродействию, точности движения и экономному использованию вычислительных ресурсов. При этом гарантии сходимости за заданное время основываются на определённых математических предположениях и должны оцениваться с учётом ограничений реальных исполнительных механизмов.

Наряду с траекторным управлением в пространстве обобщённых координат развивается адаптивное управление движением рабочего инструмента непосредственно в рабочем пространстве. Для таких систем существенное значение имеют кинематические преобразования, связывающие движение сочленений с положением и ориентацией рабочего инструмента.

В исследовании Ху и соавторов [60] предложен адаптивный метод управления манипулятором в рабочем пространстве на основе принципа внутренней модели. Рассмотрена задача асимптотического отслеживания траектории при неопределённости кинематических и динамических параметров. Особенностью предлагаемого подхода является использование обратной связи по ошибке движения рабочего инструмента и измерениям координат и скоростей сочленений. Авторы рассматривают класс задающих траекторий, представляемых многогармоническими сигналами с неизвестными параметрами.

Данный подход демонстрирует возможности адаптивного управления при неполной информации не только о механической системе, но и о параметрах задающего движения. Вместе с тем область его применения определяется принятыми предположениями относительно структуры задающих сигналов и доступных измерений.

Особую практическую значимость приобретают адаптивные методы, предназначенные для робототехнических систем, взаимодействующих с окружающей средой. В таких задачах необходимо обеспечивать не только воспроизведение заданного движения, но и регулирование контактных усилий, возникающих при взаимодействии рабочего инструмента с технологическим объектом.

В работе [61] предложен единый адаптивный подход к управлению движением и контактным усилием манипулятора с упругими сочленениями. Разработанный алгоритм позволяет реализовывать управление движением при отсутствии контакта и управление усилием при взаимодействии с окружающей средой без явного переключения между отдельными законами управления. Авторами выполнен анализ устойчивости с использованием метода Ляпунова и проведены экспериментальные исследования на робототехнической установке.

Полученные результаты свидетельствуют о расширении возможностей адаптивных систем управления за пределы традиционных задач отслеживания заданной траектории. Вместе с тем управление контактным взаимодействием предъявляет дополнительные требования к математическим моделям механической системы и окружающей среды, а также к характеристикам измерительных и исполнительных устройств.

Таким образом, анализ современных исследований показывает, что развитие адаптивного управления роботами-манипуляторами осуществляется в нескольких взаимосвязанных направлениях: совершенствование алгоритмов оценивания неизвестных динамических параметров, объединение адаптивного и робастного управления, применение нейросетевых и вероятностных методов аппроксимации, обеспечение заданных временных характеристик сходимости ошибки и расширение возможностей управления движением и контактными усилиями.

Анализ современных исследований показывает, что адаптивные методы управления, основанные на эталонных моделях, оценивании неизвестных параметров, робастных алгоритмах и нейросетевых структурах, позволяют повысить точность и устойчивость траекторного управления в условиях неопределённости.

Особый интерес представляют подходы, сочетающие линеаризацию обратной связью с адаптивной компенсацией неопределённых динамических параметров манипулятора. Это определяет актуальность дальнейшего исследования геометрических методов моделирования и преобразования нелинейной динамики, рассматриваемых в следующем разделе диссертационной работы.

1.5 Анализ геометрических подходов и методов точной линеаризации в задачах управления роботами-манипуляторами

Развитие современных методов управления роботами-манипуляторами сопровождается возрастающим интересом к математическим подходам, позволяющим учитывать геометрическую структуру механических систем и нелинейный характер их динамики. Традиционное описание движения последовательных манипуляторов основывается на использовании обобщённых координат, скоростей и динамических уравнений, получаемых методами аналитической механики. Несмотря на широкое применение такого представления, исследование свойств нелинейных механических систем и разработка методов преобразования их динамики требуют использования дополнительного математического аппарата.

Одним из перспективных направлений является применение геометрических методов теории управления, основанных на дифференциальной геометрии, теории гладких многообразий, групп и алгебр Ли. Данные методы позволяют рассматривать движение механической системы с учётом геометрических свойств её конфигурационного пространства, а также исследовать преобразования математических моделей независимо от конкретного выбора локальных координат.

В фундаментальной работе [21] предложен геометрический подход к описанию динамики роботов-манипуляторов на основе теории групп Ли и римановой геометрии. Авторами рассмотрены последовательные кинематические цепи и получены рекурсивные и аналитические представления уравнений движения, использующие операции алгебр Ли. Показано, что геометрическое описание позволяет представить кинематические и

инерционные параметры механической системы в единой математической структуре и уменьшить сложность символического представления динамических уравнений.

Особое значение данного исследования заключается в демонстрации возможностей координатно-инвариантного описания динамики манипуляторов. Использование групп Ли позволяет представить пространственные перемещения звеньев посредством преобразований, согласованных с геометрической природой движения твёрдого тела. Такой подход создаёт предпосылки для систематического исследования кинематических и динамических свойств последовательных механических систем.

Вместе с тем предложенный Парком и соавторами подход ориентирован прежде всего на построение и вычисление динамической модели. Само по себе геометрическое представление уравнений движения не решает задачу синтеза адаптивной системы управления и не гарантирует возможности точной линеаризации нелинейной динамики манипулятора. Следовательно, дальнейшего рассмотрения требуют методы, позволяющие использовать геометрические свойства механической системы непосредственно при разработке алгоритмов управления.

Существенный интерес представляет рассмотрение конфигурационного пространства последовательного манипулятора как гладкого многообразия. Для механических систем с положительно определённой кинетической энергией соответствующая квадратичная форма обобщённых скоростей задаёт риманову метрику конфигурационного пространства. При этом компоненты метрического тензора в выбранных обобщённых координатах совпадают с элементами матрицы инерции механической системы.

Такое представление позволяет установить взаимосвязь между динамическими характеристиками манипулятора и геометрическими свойствами его конфигурационного пространства. В частности, зависимость матрицы инерции от положения звеньев получает геометрическую интерпретацию, а исследование динамики механической системы может проводиться с использованием понятий римановой геометрии.

В обзорной статье С. Калинона [62] рассмотрены современные геометрические подходы к обучению, планированию, управлению и оптимизации робототехнических систем. Автор выделяет несколько направлений геометрического представления данных и движений роботов, включая геометрическую алгебру и риманову геометрию. Особое внимание уделено использованию римановых многообразий для описания объектов и переменных, обладающих неевклидовой геометрической структурой. Рассмотренные подходы демонстрируют возможности применения геометрического аппарата к различным задачам робототехники, включая управление движением и манипулирование объектами.

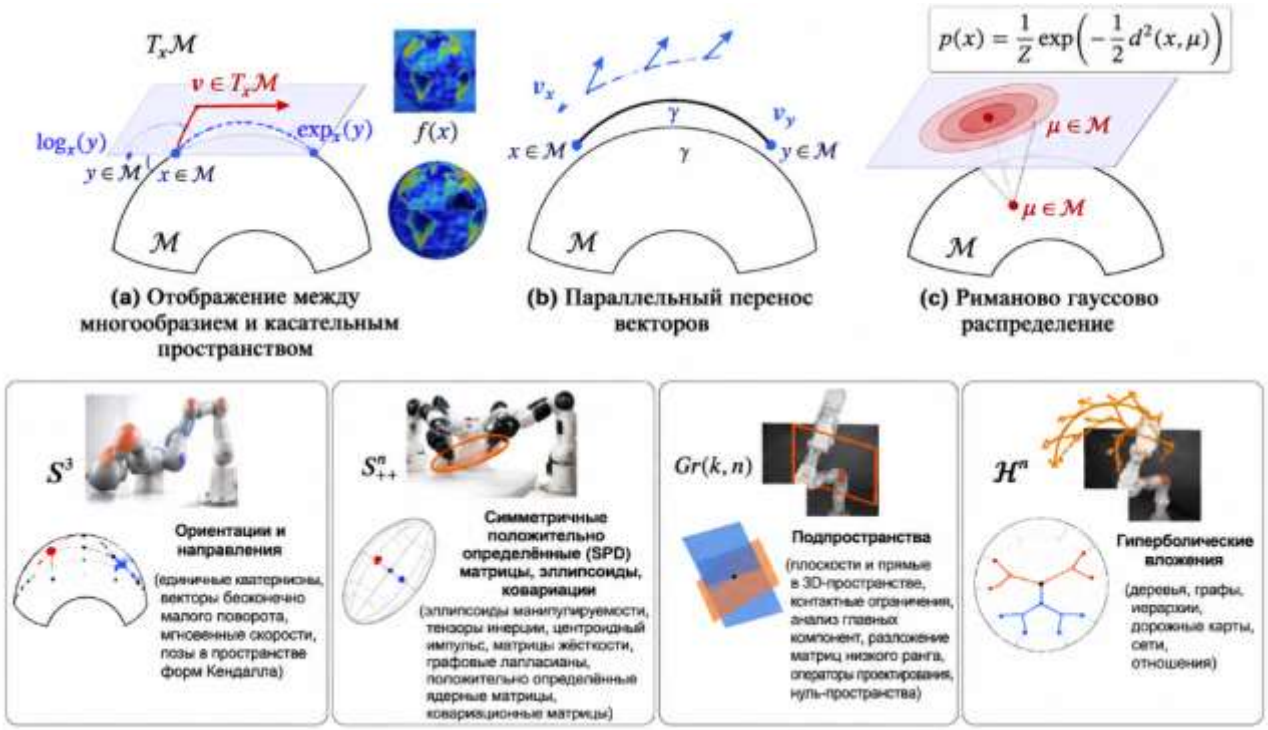

Рисунок 1.7 – Основные принципы римановой геометрии и примеры многообразий, применяемых в робототехнике

Примечание – Рисунок адаптирован из работы [54, p. 492]

Значение геометрических методов заключается в возможности учитывать свойства пространства, в котором осуществляется движение механической системы. В отличие от подходов, использующих только локальные координатные представления, геометрическое описание позволяет формулировать отдельные свойства системы в терминах, не зависящих от выбора конкретной системы координат.

Однако применение геометрического аппарата требует согласования математической модели с физической структурой объекта управления. Для последовательных роботов-манипуляторов необходимо учитывать кинематические ограничения, взаимосвязь звеньев, распределение масс и инерционные характеристики, определяющие динамику всей механической системы.

Одним из важных направлений использования геометрических методов является исследование точной линеаризации нелинейных динамических систем. В отличие от приближённой линеаризации в окрестности выбранного положения равновесия, точная линеаризация предполагает преобразование исходной нелинейной модели к линейной форме при выполнении определённых математических условий.

В исследовании Бедроссиана [32] рассмотрена связь возможности специального преобразования динамики робота-манипулятора с геометрическими свойствами его матрицы инерции. Авторами исследованы условия существования координатного преобразования, при котором

определённые нелинейные составляющие механической системы могут быть устранены без применения традиционной полной компенсации динамики методом вычисляемых моментов.

Ключевым результатом данной работы является установление необходимого и достаточного условия существования рассматриваемой факторизации матрицы инерции через якобиан координатного преобразования: соответствующая риманова метрика должна обладать тождественно нулевой кривизной. При выполнении указанного условия динамические уравнения допускают специальное преобразование, в результате которого сохраняются лишь определённые нелинейные составляющие, в частности связанные с гравитацией.

Авторы также исследовали возможности построения законов управления на основе точной и приближённой линеаризации. Полученные результаты демонстрируют непосредственную связь между геометрическими свойствами механической системы и возможностью упрощения её нелинейной динамики.

Следует отметить, что данный результат представляет принципиальное значение для дальнейшего исследования точной линеаризации последовательных манипуляторов. Возможность устранения нелинейных динамических составляющих посредством замены координат не является универсальным свойством произвольной механической системы и определяется структурой её динамической модели.

Вместе с тем необходимо различать точную линеаризацию исключительно за счёт координатных преобразований и линеаризацию посредством нелинейной обратной связи. Во втором случае преобразование динамики достигается не только изменением переменных состояния, но и специальным формированием управляющего воздействия, компенсирующего нелинейные составляющие модели.

Методы линеаризации обратной связью получили широкое распространение при управлении роботами-манипуляторами, поскольку при полном управлении сочленениями и выполнении необходимых условий позволяют сформировать линейную динамику ошибки воспроизведения заданной траектории. Вместе с тем их практическая эффективность зависит от точности динамической модели и возможности реализации рассчитанных управляющих моментов.

В обзорной работе М. Спонга [23], опубликованной в 2022 году, представлен исторический анализ развития теории управления роботами-манипуляторами, включая методы нелинейного, робастного и адаптивного управления. Автор рассматривает фундаментальные свойства динамики механических систем, послужившие основой для разработки методов линеаризации обратной связью и алгоритмов управления при неопределённости параметров. Показано, что использование структуры динамических уравнений сыграло определяющую роль в развитии модельно-ориентированных методов управления роботами.

Рассмотренные исследования показывают, что методы точной линеаризации и геометрического моделирования являются взаимосвязанными

направлениями нелинейной теории управления. Геометрические свойства механической системы могут определять условия существования координатных преобразований, тогда как использование обратной связи позволяет решать более широкий класс задач преобразования динамики при наличии соответствующих управляющих воздействий.

В современных исследованиях геометрический подход получает дальнейшее развитие применительно к задачам траекторного управления механическими системами с различной структурой конфигурационного пространства.

Эспиндола и соавторы [63] предложили метод геометрического управления в скользящем режиме для полностью управляемых механических систем на группах Ли. Авторы рассматривают пространство состояний с групповой структурой и используют геометрическое представление поверхности скольжения для построения нелинейного регулятора. В качестве примера приведена задача управления ориентацией твёрдого тела на специальной ортогональной группе SO(3).

Предложенный подход демонстрирует возможность распространения известных принципов скользящего управления на механические системы, переменные состояния которых принадлежат нелинейным многообразиям. При этом использование групповой структуры позволяет формулировать закон управления с учётом геометрических свойств пространства состояний.

Вместе с тем работа Эспиндолы и др. ориентирована на геометрическое построение скользящего управления и не решает непосредственно задачу точной линеаризации динамической модели произвольного последовательного манипулятора посредством координатного преобразования. Поэтому её результаты следует рассматривать как пример развития геометрических методов нелинейного управления, а не как решение всех задач, связанных с линеаризацией механических систем.

В исследовании Шао и соавторов [64] предложен геометрический подход к моделированию и траекторному управлению полностью управляемыми роботами-манипуляторами на основе левоинвариантного представления движения в группе SE(3). Разработанный алгоритм сочетает геометрическую пропорционально-дифференциальную обратную связь с компенсацией динамических воздействий. Устойчивость системы обоснована методом Ляпунова, а эффективность подтверждена компьютерным моделированием движения манипулятора UR5e. При этом используемую авторами компенсацию динамики посредством обратной связи следует отличать от точной линеаризации исключительно за счёт координатных преобразований.

В работе Вана и соавторов [65] предложен геометрический прогнозирующий регулятор для орбитального робота с манипулятором. Использование групп Ли позволяет учитывать пространственное движение системы с плавающим основанием и динамическую взаимосвязь между её элементами. Несмотря на отличие рассматриваемого объекта от манипулятора с неподвижным основанием, исследование демонстрирует возможности

применения геометрических методов к управлению сложными нелинейными системами.

Анализ существующих методов точной линеаризации показал необходимость разграничения координатных преобразований и линеаризации обратной связью, применимость которых определяется различными математическими условиями.

Рассмотренные исследования подтверждают перспективность геометрических методов управления, однако их применение требует учёта структуры конфигурационного пространства и динамических свойств манипулятора.

Таким образом, дальнейшее исследование направлено на построение геометрической модели последовательного манипулятора с метрикой, определяемой кинетической энергией, изучение условий точной линеаризации его динамики и разработку адаптивной системы траекторного управления.

Выводы по разделу 1, постановка цели и задач диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту:

Проведённый анализ современных методов управления многозвенными роботами-манипуляторами позволил выявить основные особенности их динамики и ограничения существующих подходов к траекторному управлению.

Последовательный робот-манипулятор представляет собой нелинейную многосвязную систему, динамика которой зависит от конфигурации, массово-инерционных параметров, полезной нагрузки и внешних воздействий.

Методы траекторного управления, основанные на обратной динамике и линеаризации обратной связью, позволяют компенсировать нелинейность системы, однако их эффективность существенно зависит от точности математической модели.

Метод вычисляемых моментов обеспечивает линеаризацию динамики манипулятора, но характеризуется чувствительностью к параметрическим неопределённостям и внешним возмущениям.

Дифференциальная плоскостность представляет интерес для исследования структурных свойств динамики манипулятора и установления связи между плоскими выходами, линеаризацией обратной связью и методом вычисляемых моментов.

Таким образом, дальнейшее исследование направлено на изучение условий преобразования нелинейной динамики манипулятора к эквивалентной линейной системе, разработку робастного закона траекторного управления и анализ его устойчивости в условиях неопределённости параметров и внешних возмущений. Предусматривается сравнительная оценка предложенного метода с классическим СТС.

Цель исследования: исследование геометрически обоснованных методов математического моделирования и точной линеаризации динамики последовательного робота-манипулятора, а также построение на их основе адаптивной системы траекторного управления, обеспечивающей

воспроизведение заданных траекторий движения в условиях неопределённости динамических параметров объекта управления.

Задачи исследования:

1. Провести анализ существующих методов математического моделирования динамики последовательных роботов-манипуляторов, методов точной линеаризации нелинейных систем и адаптивного траекторного управления, определить их особенности, преимущества и ограничения.

2. Разработать геометрическое описание кинематики последовательного робота-манипулятора с использованием аппарата групп и алгебр Ли для определения конфигураций и скоростей его звеньев.

3. Представить конфигурационное пространство манипулятора как риманово многообразие с метрикой, определяемой кинетической энергией, и получить аналитические выражения для вычисления метрического тензора по геометрическим и инерционным характеристикам звеньев.

4. Построить динамическую модель последовательного робота-манипулятора на римановом многообразии с учётом геометрической структуры его конфигурационного пространства и действующих управляющих моментов.

5. Разработать процедуру точной линеаризации уравнений динамики последовательного манипулятора посредством обратной связи по обобщённым координатам и скоростям и на её основе построить систему траекторного управления.

6. Разработать систему адаптивного траекторного управления последовательным роботом-манипулятором на основе линеаризации нелинейной динамики обратной связью, исследовать условия её устойчивости и свойства ошибки слежения при неопределённости динамических параметров объекта управления.

7. Выполнить компьютерное моделирование разработанных алгоритмов управления, исследовать точность воспроизведения заданных траекторий, влияние неопределённости динамических параметров и внешних возмущений на качество управления, а также провести сравнительный анализ полученных результатов.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Геометрическая модель динамики последовательного манипулятора, основанная на представлении его конфигурационного пространства как риманова многообразия с метрикой, определяемой кинетической энергией.

2. Метод траекторного управления последовательным манипулятором, основанный на точной линеаризации его нелинейной динамики посредством обратной связи.

3. Адаптивно-робастный алгоритм траекторного управления последовательным манипулятором на основе точной линеаризации и адаптивной робастной коррекции, эффективность которого при параметрической неопределённости и внешних возмущениях подтверждена компьютерным моделированием.

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

2.1 Конфигурационное пространство последовательного робота-манипулятора

В прикладной задаче обработки поверхности исходную геометрию детали восстанавливают по данным сканирования [31], а путь инструмента при плазменном напылении строят с использованием геодезического расстояния на поверхности [30]. Для описания движения самого манипулятора перейдём к его конфигурационному пространству, точкам которого соответствуют положения всех сочленений.

В первой главе определено, что робот-манипулятор представляет собой механическую систему, образованную жёсткими звеньями, соединёнными кинематическими парами. Сочленения обеспечивают допустимые относительные перемещения соседних звеньев, а приводы создают необходимые управляющие воздействия. На конечном звене закрепляется рабочий инструмент, предназначенный для выполнения заданных операций.

Обозначим через Q множество всех допустимых конфигураций манипулятора. Структура сочленений определяет строение этого пространства как гладкого многообразия. Чтобы описать динамику манипулятора, далее выразим скорости точечных масс через скорости сочленений и по кинетической энергии определим метрику конфигурационного пространства.

Рассмотрим последовательный робот-манипулятор с неподвижным основанием, образованный n абсолютно жёсткими подвижными звеньями и n одноподвижными вращательными сочленениями. Основанию присвоим номер 0, а подвижные звенья пронумеруем от 1 до n. Сочленение с номером k соединяет звенья $k-1$ и k. Предполагается, что координаты сочленений независимы, а дополнительные ограничения, связанные с механическими упорами и столкновениями звеньев, не учитываются.

Конфигурация манипулятора определяется взаимным расположением его звеньев. Выберем исходную конфигурацию и обозначим через θ_k угол относительного поворота в k-м сочленении, отсчитываемый от соответствующего исходного положения. Совокупность обобщённых координат

$$\theta = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n)^T \tag{2.1}$$

определяет конфигурацию механизма. Распределение масс влияет на его инерционные характеристики, но не изменяет конфигурационное пространство при сохранении геометрии звеньев и структуры сочленений.

Для вращательного сочленения без ограничителей углы θ_k и $\theta_k + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$, соответствуют одной физической конфигурации. Поэтому пространство конфигураций отдельного сочленения отождествляется с окружностью S^1. Конфигурационное пространство последовательного манипулятора с n независимыми вращательными сочленениями представляет собой произведение окружностей [70]:

$$Q = (S^1)^n = \mathbb{T}^n, \tag{2.2}$$

где $\mathbb{T}^n$ - n-мерный тор. Эквивалентное представление имеет вид $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$.

Таким образом, конфигурации описываются наборами углов с отождествлением значений, различающихся на целое число полных оборотов каждого сочленения.

Углы являются локальными координатами на Q. При описании конкретного движения допускается использовать непрерывно развёрнутые углы, значения которых могут выходить за пределы интервала длиной 2π. Такой выбор позволяет непрерывно отслеживать вращение сочленений и вычислять производные углов по времени. При этом физическая конфигурация по-прежнему определяется с точностью до полных оборотов.

Движение манипулятора на временном интервале I задаётся гладкой кривой $\gamma: I \to Q$.

Точка $\gamma(t)$ представляет конфигурацию механизма в момент времени t. В выбранных локальных координатах эта кривая описывается функциями $\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$. Производная кривой является касательным вектором в текущей конфигурации: $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}Q$.

Его координатное представление имеет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i\,(t)\,\frac{\partial}{\partial\theta_i}\Big|_{\gamma(t)}. \tag{2.3}$$

Следовательно, обобщённые скорости $\dot{\theta}_i$ являются компонентами касательного вектора к траектории. Конфигурация характеризует положение механизма, тогда как его механическое состояние включает также скорость и задаётся точкой касательного расслоения: $\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) \in TQ$.

Конфигурационное пространство манипулятора необходимо отличать от пространства положений и ориентаций рабочего инструмента. Каждая точка пространства Q соответствует определённой конфигурации манипулятора. По заданным углам сочленений положение и ориентация рабочего инструмента определяются посредством прямого кинематического отображения. Для пространственного механизма оно имеет вид $H: Q \to SE(3)$, где $SE(3)$ – группа пространственных перемещений твёрдого тела. Для планарного механизма используется группа $SE(2)$. Положение выбранной точки рабочего инструмента задаётся отдельным отображением в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$. Различные конфигурации сочленений могут соответствовать одному положению этой точки, поэтому её декартовы координаты в общем случае не определяют конфигурацию всего манипулятора.

В качестве примера рассмотрим двухзвенный планарный манипулятор с двумя вращательными сочленениями, представленный на рисунке 2.1. Угол θ_1 определяет ориентацию первого звена относительно неподвижной оси, а θ_2 –

поворот второго звена относительно первого. Абсолютный угол ориентации второго звена равен $\theta_1 + \theta_2$.

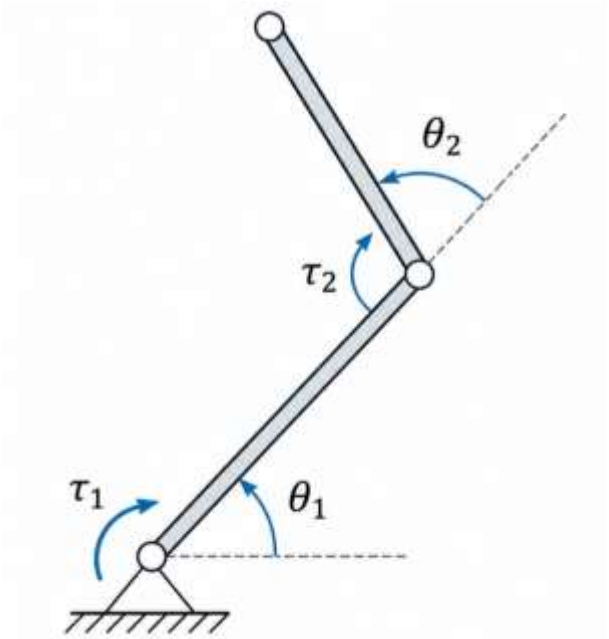

Рисунок 2.1 – Последовательный двухзвенный манипулятор

При отсутствии ограничений на углы поворота конфигурационное пространство этого механизма имеет вид

$$Q = S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2. \tag{2.4}$$

Каждая точка двумерного тора соответствует определённой паре углов сочленений. Движение механизма представляется кривой на этом торе, а не кривой в рабочей плоскости. Траектория рабочего инструмента получается из конфигурационной траектории с помощью прямого кинематического отображения.

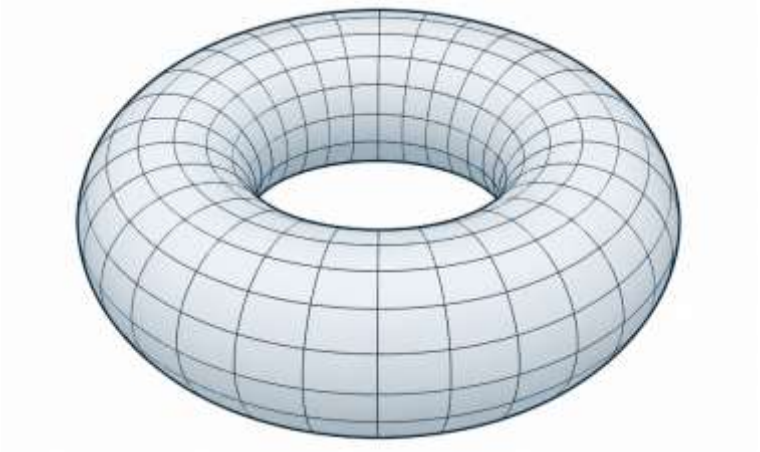

Рисунок 2.2 - Конфигурационное пространство двухзвенного манипулятора: двумерный тор $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$

Изображение тора иллюстрирует топологическую структуру конфигурационного пространства. Его геометрические характеристики, используемые при описании динамики, далее определяются кинетической энергией манипулятора. Поэтому метрика конфигурационного пространства не отождествляется с метрикой поверхности изображённого тора в трёхмерном евклидовом пространстве.

Для вычисления кинетической энергии необходимо выразить скорости точечных масс через обобщённые скорости сочленений. Эти зависимости устанавливаются посредством кинематических преобразований и соответствующих линейных якобианов.

2.2 Кинематическая модель последовательного робота-манипулятора

Кинематическое описание последовательного робота-манипулятора устанавливает взаимосвязь между обобщёнными координатами сочленений и положениями, ориентациями и скоростями отдельных звеньев. Для последующего построения кинетической энергии необходимо определить скорости всех масс, входящих в механическую систему. Для этого выразим линейные скорости точек расположения масс через обобщённые скорости сочленений.

Чтобы задать конфигурацию каждого звена относительно основания, введём системы координат. С основанием манипулятора свяжем неподвижную правую ортонормированную систему координат $\{S\}$. С каждым k-м звеном свяжем подвижную систему $\{L_k\}$. Для модели невесомых звеньев с точечными массами начало системы $\{L_k\}$ разместим в точке расположения соответствующей массы. Её положение относительно основания обозначим через $p_k(\theta)$.

Положение и ориентация k-го звена относительно неподвижной системы определяются однородной матрицей

$$G_k(\theta) = \begin{pmatrix} R_k(\theta) & p_k(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3), \tag{2.5}$$

где $R_k(\theta) \in SO(3)$ – матрица ориентации связанной системы, а $p_k(\theta) \in \mathbb{R}^3$ – радиус-вектор её начала.

Группа $SE(3)$ описывает пространственные перемещения твёрдого тела, а соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{se}(3)$ их инфинитезимальные генераторы. Используем представление твиста в порядке «линейная составляющая-угловая составляющая»:

$$\xi = \begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \qquad \hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{a} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(3), \tag{2.6}$$

где кососимметрическая матрица $\hat{a}$ определяется равенством $\hat{a}x = a \times x$.

Знак $\hat{}$ обозначает переход от векторного представления твиста к матричному.

Для вращательного сочленения обозначим через a_i единичный направляющий вектор оси, а через b_i – радиус-вектор произвольной точки этой оси. Оба вектора задаются относительно неподвижной системы в исходной конфигурации. Тогда генератор движения сочленения определяется выражением

$$\xi_i = \begin{pmatrix} -a_i \times b_i \\ a_i \end{pmatrix}, \qquad \| a_i \| = 1. \tag{2.7}$$

Конечное перемещение, соответствующее повороту на угол θ_i, представляется матричной экспонентой $e^{\hat{\xi}_i \theta_i}$.

Выразим конфигурацию каждого звена через произведение экспонент. За исходную примем конфигурацию манипулятора при $\theta = 0$. Через $G_k(0)$ обозначим матрицу, задающую положение и ориентацию k-го звена в этой конфигурации. При произвольном θ матрицу $G_k(\theta)$ получаем умножением $G_k(0)$ слева на произведение экспоненциальных преобразований первых k сочленений, расположенных в порядке от основания к звену [70]:

$$G_k(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \cdots e^{\hat{\xi}_k \theta_k} G_k(0). \tag{2.8}$$

В этом выражении генераторы всех сочленений заданы в одной неподвижной системе координат для одной исходной конфигурации. Порядок множителей соответствует последовательности сочленений от основания к рассматриваемому звену.

Для краткости введём обозначения $E_i(\theta_i) = e^{\hat{\xi}_i \theta_i}$, $P_{i-1}(\theta) = E_1 E_2 \cdots E_{i-1}$, $P_0 = I_4$.

При движении манипулятора матрица $G_k(t)$ описывает кривую на группе $SE(3)$. Чтобы определить положение очередного звена, к произведению, вычисленному для предыдущих сочленений, добавим один множитель. С учётом начального положения системы координат звена получим

$$P_k = P_{k-1} E_k, \qquad G_k(t) = P_k(t) G_k(0). \tag{2.9}$$

Множитель E_k описывает поворот в k-м сочленении. Поскольку его генератор постоянен,

$$\dot{E}_k E_k^{-1} = \hat{\xi}_k \dot{\theta}_k. \tag{2.10}$$

Перейдём от конфигураций звеньев к их пространственным якобианам. Пространственный твист скорости k-го звена определяется соотношением

$$\hat{V}_k^s = \dot{G}_k G_k^{-1}. \tag{2.11}$$

Постоянный множитель $G_k(0)$ сокращается в произведении $\dot{G}_k G_k^{-1}$. Применяя правило дифференцирования к $P_{k-1}E_k$ и учитывая (2.10), получаем рекуррентное соотношение

$$\hat{V}_k^s = \hat{V}_{k-1}^s + P_{k-1}\hat{\xi}_k P_{k-1}^{-1}\dot{\theta}_k, \qquad V_0^s = 0. \tag{2.12}$$

Присоединённое преобразование группы $SE(3)$ задаётся равенством [70]

$$\widehat{\mathrm{Ad}_G \xi} = G\hat{\xi}G^{-1}. \tag{2.13}$$

При принятом порядке компонент твиста для $G = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответствующая матрица имеет вид $\mathrm{Ad}_G = \begin{pmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Для первого звена имеем $V_1^s = \xi_1\dot{\theta}_1$. Для второго звена к этому твисту добавляется $\mathrm{Ad}_{P_1}\xi_2\dot{\theta}_2$. На каждом следующем шаге вычисляем один новый столбец: он выражает вклад очередного сочленения в неподвижной системе координат. В результате для k-го звена получаем

$$V_k^s = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ad}_{P_{i-1}}\xi_i\dot{\theta}_i = J_k^s(\theta)\dot{\theta}, \tag{2.14}$$

где пространственный якобиан определяется выражением

$$J_k^s(\theta) = (\xi_1 \quad \mathrm{Ad}_{E_1}\xi_2 \quad \cdots \quad \mathrm{Ad}_{E_1\cdots E_{k-1}}\xi_k \quad 0 \quad \cdots \quad 0). \tag{2.15}$$

Матрица J_k^s имеет размерность $6 \times n$. Столбцы с номерами $k+1, \ldots, n$ равны нулю, поскольку последующие сочленения не изменяют конфигурацию k-го звена.

Пусть начало системы координат, связанной с k-м звеном, выбрано в точке сосредоточения массы, а $p_k(\theta)$ – радиус-вектор этой точки в неподвижной системе. Для вычисления кинетической энергии требуется скорость $\dot{p}_k$. Её связь с линейной составляющей v_k^s пространственного твиста следует из правого верхнего блока матрицы $\dot{G}_k G_k^{-1}$. Этот блок равен $\dot{p}_k - \dot{R}_k R_k^T p_k$. Поскольку $\dot{R}_k R_k^T = \hat{\Omega}_k$, где Ω_k – угловая скорость звена в неподвижной системе, получаем:

$$\dot{p}_k = v_k^s + \Omega_k \times p_k. \tag{2.16}$$

Обозначим через $J_{v,k}^s$ и $J_{\omega,k}^s$ линейный и угловой блоки пространственного якобиана J_k^s. Тогда $v_k^s = J_{v,k}^s\dot{\theta}$ и $\Omega_k = J_{\omega,k}^s\dot{\theta}$. Подставляя эти выражения в (2.16) и учитывая, что $\Omega_k \times p_k = -\hat{p}_k\Omega_k$, получаем якобиан точки сосредоточения массы и её скорость:

$$J_k(\theta) = J^s_{v,k} - \hat{p}_k J^s_{\omega,k} = (I_3 \quad -\hat{p}_k) J^s_k(\theta), \qquad \dot{p}_k = J_k(\theta)\dot{\theta}. \quad (2.17)$$

Тот же якобиан можно вычислить непосредственно по зависимости положения точки от обобщённых координат:

$$J_k(\theta) = \frac{\partial p_k(\theta)}{\partial \theta}. \quad (2.18)$$

Каждый якобиан $J_k(\theta)$ имеет n столбцов и выражает скорость соответствующей массы через общий для всех звеньев вектор $\dot{\theta}$. Подставляя (2.17) в выражение для кинетической энергии каждой массы и суммируя вклады, получим полную кинетическую энергию манипулятора как квадратичную форму по обобщённым скоростям. В следующем подразделе определим коэффициенты этой формы.

2.3 Построение римановой метрики на основе кинетической энергии

В подразделе 2.2 скорости точечных масс выражены через обобщённые скорости сочленений. Используем эти зависимости для построения тензора кинетической энергии и установим условия, при которых он задаёт риманову метрику на конфигурационном пространстве манипулятора.

Вычислим полную кинетическую энергию как сумму кинетических энергий точечных масс. Рассмотрим последовательный манипулятор с n независимыми сочленениями и невесомыми звеньями. Его конфигурация задаётся обобщёнными координатами $\theta = [\theta_1 \quad \cdots \quad \theta_n]^T$. Обозначим через $m_k > 0$ массу, расположенную на конце k-го звена, а через $p_k(\theta) \in \mathbb{R}^3$ – её положение в неподвижной системе координат. Согласно (2.17), скорость этой массы равна $\dot{p}_k = J_k(\theta)\dot{\theta}$, где $J_k(\theta)$ – якобиан положения k-й массы размера $3 \times n$.

Полная кинетическая энергия манипулятора равна сумме кинетических энергий всех точечных масс:

$$E_к = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \parallel \dot{p}_k \parallel^2. \quad (2.19)$$

Подставляя в (2.19) выражения для скоростей масс и вынося $\dot{\theta}^T$ и $\dot{\theta}$ за знак суммы, получаем:

$$E_к = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \left(\sum_{k=1}^{n} m_k J_k^T(\theta) J_k(\theta) \right) \dot{\theta}.$$

Введём матрицу:

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{n} m_k J_k^T(\theta) J_k(\theta). \quad (2.20)$$

Тогда кинетическая энергия принимает вид квадратичной формы по обобщённым скоростям:

$$E_{\text{к}}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T g(\theta)\dot{\theta}. \tag{2.21}$$

Положение k-й массы зависит только от координат первых k сочленений. Поэтому столбцы матрицы $J_k(\theta)$ с номерами больше k равны нулю. Следовательно, в элемент $g_{ij}(\theta)$ могут вносить вклад лишь массы с номерами $k \geq \max(i, j)$. Из (2.20) получаем:

$$g_{ij}(\theta) = \sum_{k=\max(i,j)}^{n} m_k \sum_{a=1}^{3} (J_k(\theta))_{ai} (J_k(\theta))_{aj}. \tag{2.22}$$

Здесь a – номер строки матрицы $J_k(\theta)$, а i и j – номера её столбцов. Недиагональные компоненты g_{ij} отражают совместный вклад скоростей разных сочленений в кинетическую энергию системы.

В развёрнутой матричной записи:

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \cdots & \dot{\theta}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n\end{bmatrix}.$$

Покажем, как по матрице кинетической энергии $g(\theta)$ определяется билинейная форма на касательном пространстве, и установим, при каких условиях эта форма задаёт риманову метрику на конфигурационном пространстве манипулятора.

Установим, как преобразуются компоненты билинейной формы при замене обобщённых координат. В каждой конфигурации, представленной координатами θ, рассмотрим два касательных вектора $u, w \in T_\theta Q$. В координатном базисе они записываются как (2.23):

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial \theta_i}\Big|_\theta, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial \theta_i}\Big|_\theta.$$

Определим билинейную форму [22]

$$g_\theta(u, w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(\theta) u^i w^j = u^T g(\theta) w, \tag{2.23}$$

где в матричной записи u и w обозначают столбцы компонент соответствующих касательных векторов.

Эта форма линейна по каждому аргументу. Кинетическая энергия выражается через неё равенством

$$E_{\text{к}}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2} g_\theta(\dot{\theta},\dot{\theta}).$$

Проверим тензорный закон преобразования. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – другие локальные координаты на той же области конфигурационного пространства. Тогда:

$$\dot{\theta}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_\alpha} \dot{\varphi}_\alpha.$$

Подставляя это выражение в кинетическую энергию, получаем

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\varphi) \dot{\varphi}_\alpha \dot{\varphi}_\beta,$$

где

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\big(\theta(\varphi)\big) \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_\alpha} \frac{\partial \theta_j}{\partial \varphi_\beta}.$$

В матричной форме

$$\tilde{g}(\varphi) = A^T(\varphi) g\big(\theta(\varphi)\big) A(\varphi), \qquad A(\varphi) = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}. \quad (2.24)$$

Это закон преобразования компонент ковариантного тензора второго порядка. Следовательно, формы g_θ определяют тензорное поле типа $(0,2)$, которое в локальных координатах записывается как

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(\theta)\, d\theta_i \otimes d\theta_j.$$

Здесь $d\theta_i$ – дифференциалы координатных функций, а $\otimes$ обозначает тензорное произведение. При изменении координат элементы матрицы $g(\theta)$ преобразуются по приведённому закону, тогда как само тензорное поле и кинетическая энергия данного движения остаются неизменными.

Симметричность следует из (2.20), поскольку

$$g^T(\theta) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, (J_k^T J_k)^T = g(\theta).$$

Следовательно, матрица кинетической энергии симметрична: $g_{ij}(\theta) = g_{ji}(\theta)$. По формуле (2.23) отсюда следует симметричность билинейной формы: $g_\theta(u, w) = g_\theta(w, u)$ для любых $u, w \in T_\theta Q$.

Проверим, при каких условиях полученная форма положительно определена. Для модели точечных масс при произвольном касательном векторе $u \in T_\theta Q$ из (2.20) и (2.23) получаем

$$g_\theta(u, u) = \sum_{k=1}^{n} m_k \parallel J_k(\theta) u \parallel^2. \qquad (2.25)$$

Все слагаемые в (2.25) неотрицательны, поэтому форма g_θ положительно полуопределена. Поскольку $m_k > 0$ для каждого k, равенство $g_\theta(u, u) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $J_k(\theta) u = 0$ одновременно для всех $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, необходимое и достаточное условие положительной определённости формы в конфигурации θ имеет вид

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker J_k(\theta) = \{0\}. \qquad (2.26)$$

Условие (2.26) означает, что при любой ненулевой обобщённой скорости хотя бы одна точечная масса имеет ненулевую линейную скорость. Поскольку в (2.26) учитываются якобианы всех масс, потеря ранга якобиана рабочего инструмента сама по себе ещё не означает вырождения формы g_θ.

При выполнении (2.26) форма g_θ невырождена. Действительно, пусть $g_\theta(u, w) = 0$ для всех $w \in T_\theta Q$. Полагая $w = u$, получаем $g_\theta(u, u) = 0$, откуда в силу положительной определённости следует $u = 0$. Таким образом, ядро формы состоит только из нулевого вектора. Её матрица $g(\theta)$ симметрична и положительно определена, поэтому $\det g(\theta) > 0$.

Положения точечных масс $p_k(\theta)$ гладко зависят от обобщённых координат. Поэтому элементы якобианов $J_k(\theta)$, представляющие собой частные производные координат $p_k(\theta)$, также гладко зависят от θ. Поскольку массы m_k постоянны, из (2.20) следует, что компоненты $g_{ij}(\theta)$ тензора кинетической энергии являются гладкими функциями на каждой координатной области.

Обозначим через $U \subseteq Q$ множество всех конфигураций, в которых выполняется условие (2.26). Это множество открыто, поскольку положительная определённость гладко зависящей от θ матрицы $g(\theta)$ сохраняется в окрестности каждой такой конфигурации. На U тензор кинетической энергии гладок, симметричен и положительно определён, поэтому задаёт риманову метрику. В подразделе 2.4 по формуле (2.20) вычислим её компоненты для двухзвенного планарного манипулятора и покажем, что при положительных массах и длинах звеньев $U = Q$.

2.4 Метрический тензор двухзвенного планарного манипулятора

Применим формулу (2.20) к двухзвенному планарному манипулятору с неподвижным основанием и двумя вращательными сочленениями. Звенья длиной $l_1, l_2 > 0$ считаем абсолютно жёсткими и невесомыми, а массы $m_1, m_2 > 0$ – сосредоточенными на их концах. Движение происходит в плоскости Oxy. Угол θ_1 отсчитывается от неподвижной оси Ox, а θ_2 задаёт поворот второго звена относительно первого. При принятых в подразделе 2.1 предположениях конфигурационное пространство имеет вид $Q = T^2$.

Построим кинематические преобразования для двухзвенной модели. С каждым звеном свяжем подвижную систему координат. Её начало поместим в точку сосредоточения соответствующей массы, а ось абсцисс направим вдоль звена от сочленения к его концу. Тогда углы ориентации первой и второй систем относительно неподвижной системы равны θ_1 и $\theta_1 + \theta_2$ соответственно.

Для построения кинематических преобразований воспользуемся экспоненциальным отображением алгебры Ли $\mathfrak{se}(2)$ в группу $SE(2)$. В плоском представлении расположим компоненты пространственного твиста в порядке $(\omega, v_x, v_y)^T$, где ω – проекция угловой скорости на ось Oz, а $v = (v_x, v_y)^T$ – линейная составляющая твиста. При таком порядке компонент векторное и матричное представления имеют вид

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \qquad \hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v_x \\ \omega & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Обозначим через $b = (b_x, b_y)^T$ координаты точки пересечения оси вращения с плоскостью Oxy в неподвижной системе координат. Если ось направлена вдоль положительной полуоси Oz, то при единичной угловой компоненте линейная часть генератора вращения определяется равенством

$$v = -Sb, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Матрица S задаёт поворот на $90°$ против часовой стрелки. В исходной конфигурации $\theta_1 = \theta_2 = 0$ оба звена направлены вдоль положительной полуоси Ox, а оси сочленений пересекают рабочую плоскость в точках $b_1 = (0,0)^T$ и $b_2 = (l_1, 0)^T$. По формуле (2.28) получаем $v_1 = (0,0)^T$ и $v_2 = (0, -l_1)^T$. Подставляя эти векторы в (2.27) при $\omega = 1$, находим матричные представления генераторов вращения

$$\hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В исходной конфигурации оси подвижных систем сонаправлены с осями неподвижной системы, а их начала расположены в точках $(l_1, 0)^T$ и $(l_1 + l_2, 0)^T$. Соответствующие однородные матрицы преобразования имеют вид

$$G_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_2(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразования звеньев в произвольной конфигурации определяются произведениями экспонент

$$\begin{aligned} G_1(\theta) &= e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} G_1(0), \\ G_2(\theta) &= e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} G_2(0). \end{aligned}$$

Поскольку начало каждой подвижной системы совпадает с точкой сосредоточения массы, первые две компоненты последнего столбца $G_k(\theta)$ задают координаты этой массы в неподвижной системе. Выполняя умножение, получаем

$$\begin{aligned} p_1(\theta) &= \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix}, \\ p_2(\theta) &= \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Применим рекуррентное соотношение (2.12) и формулу (2.15) в принятом порядке компонент плоского твиста $\left(\omega, v_x, v_y\right)^T$. Первый столбец пространственного якобиана первого звена равен $\xi_1 = (1,0,0)^T$. Второй столбец нулевой, поскольку поворот во втором сочленении не влияет на движение первого звена.

При переходе ко второму звену первый столбец сохраняется. Второй столбец получаем, применяя к генератору ξ_2 присоединённое преобразование, соответствующее повороту $E_1(\theta_1) = \exp\left(\hat{\xi}_1 \theta_1\right)$. В результате $\mathrm{Ad}_{E_1(\theta_1)} \xi_2 = (1, l_1 \sin\theta_1, -l_1 \cos\theta_1)^T$. Таким образом, пространственные якобианы звеньев имеют вид

$$J_1^s(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_2^s(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & l_1 \sin\theta_1 \\ 0 & -l_1 \cos\theta_1 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Для вычисления кинетической энергии выразим скорость каждой массы через пространственный твист соответствующего звена. В плоскости Oxy формула (2.16) принимает вид

$$\dot{p}_k = v_k^s + \omega_k S p_k,$$

где v_k^s – столбец двух линейных компонент твиста. Для точки $p_k = (x_k, y_k)^T$ имеем $Sp_k = (-y_k, x_k)^T$. Этот вектор служит коэффициентом при угловой скорости ω_k и образует первый столбец матрицы $B(p_k)$, связывающей твист звена со скоростью точки. Подставляя $V_k^s = J_k^s(\theta)\dot{\theta}$ в выражение $\dot{p}_k = B(p_k)V_k^s$, получаем

$$B(p_k) = \begin{bmatrix} -y_k & 1 & 0 \\ x_k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_k(\theta) = B\big(p_k(\theta)\big)J_k^s(\theta). \tag{2.30}$$

Подставим в (2.30) положения $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$ и пространственные якобианы (2.29). Для первой точечной массы получаем

$$J_1(\theta) = B(p_1)J_1^s(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 & 0 \\ l_1\cos\theta_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Для второй точечной массы имеем

$$J_2(\theta) = B(p_2)J_2^s(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Непосредственное дифференцирование положений обеих масс по обобщённым координатам даёт те же матрицы $J_k(\theta) = \partial p_k(\theta)/\,\partial\theta$, $k = 1{,}2$, в соответствии с (2.18). Подставим якобианы (2.31) и (2.32) в формулу (2.20) для вычисления компонент метрического тензора.

Используем полученные якобианы для вычисления компонент метрического тензора. Для двухзвенного планарного манипулятора с точечными массами m_1 и m_2 формула (2.20) принимает вид

$$g(\theta) = m_1 J_1^T(\theta)J_1(\theta) + m_2 J_2^T(\theta)J_2(\theta). \tag{2.33}$$

По формулам (2.31) и (2.32) вычислим вклады обеих масс. Для первой массы получаем

$$J_1^T J_1 = \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для второй массы, используя формулу косинуса разности углов, находим

$$J_2^T J_2 = \begin{bmatrix} l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2\cos\theta_2 & l_2^2 + l_1 l_2\cos\theta_2 \\ l_2^2 + l_1 l_2\cos\theta_2 & l_2^2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти произведения в (2.33), получаем матрицу метрического тензора в обобщённых координатах θ_1, θ_2

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos\theta_2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos\theta_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos\theta_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Согласно (2.21), кинетическая энергия манипулятора выражается через компоненты этой матрицы равенством

$$E_к = \frac{1}{2} g_{11} \dot{\theta}_1^2 + g_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} g_{22} \dot{\theta}_2^2.$$

Смешанное слагаемое возникает из вклада второй массы, скорость которой зависит от скоростей обоих сочленений.

Матрица $g(\theta)$ симметрична, поскольку каждое слагаемое в (2.33) симметрично. Для проверки положительной определённости симметричной матрицы размера 2×2 достаточно установить, что $g_{22} > 0$ и $\det g(\theta) > 0$. Из (2.34) имеем $g_{22} = m_2 l_2^2 > 0$. Вычисляя определитель, получаем

$$\det g(\theta) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 + m_2^2 l_1^2 l_2^2 \sin^2\theta_2 > 0. \quad (2.35)$$

При положительных массах и длинах звеньев первое слагаемое в (2.35) строго положительно, а второе неотрицательно при любом θ_2. Следовательно, матрица $g(\theta)$ положительно определена во всех конфигурациях манипулятора. Её компоненты гладкие и 2π-периодические по угловым координатам. Поэтому тензор кинетической энергии задаёт риманову метрику на всём конфигурационном пространстве $Q = T^2$, то есть для рассматриваемой модели $U = Q$.

Из (2.34) следует, что матрица $g(\theta)$ зависит только от относительного угла второго сочленения:

$$g(\theta) = g(\theta_2), \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_1} = 0, \qquad i, j = 1,2. \quad (2.36)$$

При фиксированном θ_2 изменение θ_1 соответствует общему повороту обоих звеньев в плоскости. При тех же обобщённых скоростях векторы скоростей масс поворачиваются на один и тот же угол, сохраняя свои нормы. Поэтому кинетическая энергия не зависит от θ_1. Угол θ_2 определяет взаимное положение звеньев и входит в компоненты g_{11} и $g_{12} = g_{21}$ через $\cos\theta_2$. Компонента $g_{22} = m_2 l_2^2$ постоянна, поскольку при неподвижном первом звене масса m_2 движется по окружности радиуса l_2 вокруг оси второго сочленения.

Выясним, приводит ли кинематическая сингулярность к вырождению метрики. Из (2.32) находим определитель линейного якобиана второй массы

$$\det J_2(\theta) = l_1 l_2 \sin\theta_2. \qquad (2.37)$$

При $\theta_2 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, звенья расположены на одной прямой и якобиан рабочего инструмента теряет ранг. В этих конфигурациях существует ненулевая обобщённая скорость, при которой вторая масса мгновенно неподвижна. Вместе с тем из (2.35) следует, что $\det g(\theta) = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 > 0$.

Это различие следует из условия (2.26), которое учитывает якобианы обеих масс. Пусть $u = (u_1, u_2)^T$ удовлетворяет равенствам $J_1 u = 0$ и $J_2 u = 0$. По (2.31) первый столбец J_1 имеет норму $l_1 > 0$, а второй равен нулю, поэтому $J_1 u = 0$ влечёт $u_1 = 0$. Тогда $J_2 u$ равен второму столбцу J_2, умноженному на u_2. Норма этого столбца по (2.32) равна $l_2 > 0$, откуда $u_2 = 0$. Таким образом, $\ker J_1(\theta) \cap \ker J_2(\theta) = \{0\}$. Даже в сингулярной конфигурации рабочего инструмента любая ненулевая обобщённая скорость приводит в движение хотя бы одну из масс.

Полученную метрику далее используем для вычисления коэффициентов связности Леви–Чивиты и записи уравнений движения манипулятора.

2.5 Связность Леви-Чивиты и ковариантное ускорение

Метрика кинетической энергии g задаёт скалярное произведение касательных векторов в каждой конфигурации манипулятора. Вдоль траектории $\gamma(t)$ вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$ в каждый момент принадлежит касательному пространству $T_{\gamma(t)}Q$. Для дифференцирования скорости вдоль траектории воспользуемся связностью Леви-Чивиты метрики g.

Для общего последовательного манипулятора рассмотрим область $U \subseteq Q$, на которой выполнено условие положительной определённости (2.26). Для двухзвенного планарного манипулятора с положительными массами и длинами звеньев, как показано в подразделе 2.4, эта область совпадает со всем конфигурационным пространством $Q = T^2$.

Для определения ускорения на конфигурационном многообразии введём связность, согласованную с метрикой кинетической энергии. Аффинная связность ∇ определяет ковариантную производную $\nabla_X Y$ векторного поля Y в направлении векторного поля X. По направлению X эта операция линейна над гладкими функциями. По дифференцируемому полю Y она линейна над действительными числами и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$$

где $X(f)$ – производная гладкой функции f в направлении поля X.

По основной теореме римановой геометрии [71] метрика g однозначно определяет аффинную связность, которая не имеет кручения и согласована с метрикой. Эта связность называется связностью Леви-Чивиты. Отсутствие кручения означает, что для любых гладких векторных полей X, Y на U

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0, \qquad (2.38)$$

где $[X, Y]$ – скобка Ли. Согласованность с метрикой выражается правилом дифференцирования скалярного произведения

$$X\big(g(Y,Z)\big) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{2.39}$$

Из условий (2.38) и (2.39) следует формула Кошуля [71]

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X\big(g(Y,Z)\big) + Y\big(g(X,Z)\big) - Z\big(g(X,Y)\big) \\ & + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \end{aligned} \tag{2.40}$$

При заданных X и Y правая часть (2.40) определяет скалярное произведение $\nabla_X Y$ с любым полем Z. В силу невырожденности метрики этого достаточно, чтобы однозначно определить $\nabla_X Y$. Для вычислений в обобщённых координатах применим (2.40) к координатным векторным полям.

Пусть $\theta_1, \dots, \theta_n$ – локальные координаты конфигурации, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ – соответствующие координатные векторные поля, а $g_{ij}(\theta) = g\big(\partial_i, \partial_j\big)$ – компоненты метрики. Разложим ковариантную производную одного базисного поля в направлении другого по тому же базису

$$\nabla_{\partial_j} \partial_k = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i}(\theta)\ \partial_i. \tag{2.41}$$

Коэффициенты Γ_{jk}^{i} называются символами Кристоффеля связности Леви-Чивиты. Поскольку координатные поля коммутируют, $\big[\partial_j, \partial_k\big] = 0$. Поэтому из условия (2.38) следует симметрия по нижним индексам: $\Gamma_{jk}^{i} = \Gamma_{kj}^{i}$.

Подставим $X = \partial_j$, $Y = \partial_k$ и $Z = \partial_l$ в формулу Кошуля. Все слагаемые со скобками Ли обращаются в нуль, и с учётом (2.41) получаем

$$2\sum_{i=1}^{n} g_{li}\,\Gamma_{jk}^{i} = \frac{\partial g_{lk}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_l}.$$

Обозначим через g^{il} элементы обратной матрицы $g^{-1}(\theta)$. Умножая полученное равенство на обратную матрицу, находим

$$\Gamma_{jk}^{i}(\theta) = \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{il}(\theta)\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_l}\right). \tag{2.42}$$

Следовательно, для вычисления коэффициентов связности достаточно знать матрицу метрики кинетической энергии и её первые производные по обобщённым координатам.

Запишем ковариантную производную вдоль траектории манипулятора. Пусть движение манипулятора описывается кривой $\gamma(t)$ с обобщёнными

координатами $\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$. Запишем векторное поле $Y(t)$, заданное вдоль этой кривой, в координатном базисе

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} Y^k(t)\ \partial_k|_{\gamma(t)}.$$

При дифференцировании вдоль траектории необходимо учесть как изменение компонент $Y^k(t)$, так и ковариантные производные базисных полей. По правилу Лейбница [71] и формуле (2.41) получаем

$$\frac{DY}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dY^i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i} \left(\theta(t)\right) \dot{\theta}_j(t)\, Y^k(t) \right) \partial_i|_{\gamma(t)}. \qquad (2.43)$$

Применим (2.43) к самому вектору скорости $\dot{\gamma}$. Его ковариантная производная по времени определяет ковариантное ускорение манипулятора

$$a_{\text{cov}} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}. \qquad (2.44)$$

В принятом обозначении обобщённых координат компоненты вектора скорости равны $\dot{\theta}_k$. Подставляя $Y^k = \dot{\theta}_k$ в (2.43), получаем

$$a_{\text{cov}}^{i} = \ddot{\theta}_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i}(\theta)\, \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k, \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (2.45)$$

Первое слагаемое представляет собой вторую производную обобщённой координаты, второе учитывает изменение координатного базиса вдоль движения. При нелинейной замене координат в преобразовании $\ddot{\theta}_i$ возникают дополнительные члены. Преобразование символов Кристоффеля компенсирует эти члены, поэтому выражения (2.45) являются компонентами одного и того же касательного вектора a_{cov}.

Вдоль траектории кинетическая энергия манипулятора равна $E_{\text{к}} = \frac{1}{2} g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$. Дифференцируя это равенство по времени и используя согласованность связности с метрикой (2.39), получаем

$$\frac{dE_{\text{к}}}{dt} = g_{\gamma(t)}\left(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right) = g_{\gamma(t)}(a_{\text{cov}}, \dot{\gamma}). \qquad (2.46)$$

Таким образом, производная кинетической энергии равна скалярному произведению ковариантного ускорения и скорости в метрике g. В частности, вдоль кривой с нулевым ковариантным ускорением кинетическая энергия постоянна.

Вычислим скоростные слагаемые для двухзвенной модели. Для метрики (2.34) все производные по θ_1 равны нулю, а компонента $g_{22} = m_2 l_2^2$ постоянна.

Поэтому при вычислении коэффициентов связности по (2.42) достаточно учесть производные

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta_2} = -2m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2, \qquad \frac{\partial g_{12}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial g_{21}}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2.$$

Обозначим через $c(\theta, \dot{\theta})$ столбец скоростных слагаемых в (2.45) с компонентами

$$c^i(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{jk}^i(\theta)\, \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k, \qquad i = 1,2.$$

Тогда координатный столбец ковариантного ускорения равен $\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta})$. Чтобы найти c, удобно сначала вычислить произведение $g(\theta)c(\theta, \dot{\theta})$. При умножении (2.42) на матрицу метрики обратная матрица сокращается, и для каждой компоненты получаем

$$(g(\theta)c(\theta, \dot{\theta}))_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k.$$

Подставляя производные компонент метрики, находим

$$g(\theta)c(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2 \left(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) \\ m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\, \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}. \qquad (2.47)$$

Умножение правой части (2.47) на $g^{-1}(\theta)$ даёт скоростную часть ковариантного ускорения во всех конфигурациях двухзвенного манипулятора. В подразделе 2.6 покажем, что при нулевых обобщённых силах, включая моменты приводов, уравнения динамики принимают вид $D\dot{\gamma}/dt = 0$. Траектория такого движения является геодезической метрики кинетической энергии, а время служит её аффинным параметром.

2.6 Геометрическое представление динамики манипулятора

Рассмотрим последовательный манипулятор с неподвижным основанием, абсолютно жёсткими звеньями и идеальными кинематическими связями. Движение будем описывать в области $U \subseteq Q$, где тензор кинетической энергии положительно определён и задаёт риманову метрику g. Для двухзвенного планарного манипулятора, рассмотренного в подразделе 2.4, эта область совпадает со всем конфигурационным пространством $Q = T^2$.

Пусть гравитация, трение и приводные моменты отсутствуют. Реакции идеальных связей не совершают работы на допустимых виртуальных перемещениях. При отсутствии потенциальных сил потенциальную энергию можно принять равной нулю. Тогда функция Лагранжа совпадает с кинетической энергией манипулятора

$$L(\theta,\dot{\theta}) = E_{\text{к}}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^{T} g(\theta)\dot{\theta}. \qquad (2.48)$$

Пусть траектория манипулятора на интервале $[t_0, t_1]$ задана кривой γ, локальными координатами которой служат $\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$. Функционал действия вдоль этой кривой имеет вид

$$\mathcal{S}[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\theta(t),\dot{\theta}(t)\right)\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} g_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t)\right) dt. \qquad (2.49)$$

При вариациях траектории с фиксированными концами, $\delta\theta(t_0) = \delta\theta(t_1) = 0$, условие стационарности действия $\delta\mathcal{S} = 0$ приводит к уравнениям Лагранжа [22]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0, \qquad k = 1, \dots, n. \qquad (2.50)$$

Вычислим обе производные в (2.50). Из симметрии $g_{ij} = g_{ji}$ следует, что $\partial L/\,\partial\dot{\theta}_k = \sum_{j=1}^{n} g_{kj}\,\dot{\theta}_j$. Учитывая зависимость компонент метрики от конфигурации, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} = \sum_{j=1}^{n} g_{kj}\,\ddot{\theta}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_{kj}}{\partial \theta_i}\,\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k}\,\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j.$$

Произведение $\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j$ симметрично по индексам i, j, поэтому в двойной сумме коэффициент при этом произведении можно заменить полусуммой его значений при перестановке индексов. После подстановки производных в (2.50) получаем

$$\sum_{j=1}^{n} g_{kj}\,\ddot{\theta}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k}\right)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = 0.$$

Умножим k-е уравнение на элемент $g^{\ell k}$ обратной матрицы метрики и просуммируем по k. Первое слагаемое примет вид $\ddot{\theta}_\ell$, а коэффициенты при произведениях скоростей в силу (2.42) совпадут с символами Кристоффеля связности Леви–Чивиты. Следовательно,

$$\ddot{\theta}_\ell + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = 0, \qquad \ell = 1, \dots, n. \tag{2.51}$$

Согласно (2.45), левые части этих уравнений являются компонентами ковариантного ускорения. Поэтому геометрическое уравнение свободного движения имеет вид

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \tag{2.52}$$

Таким образом, при нулевых обобщённых силах траектория манипулятора является геодезической метрики кинетической энергии, причём время служит её аффинным параметром. Скорости отдельных сочленений при таком движении могут изменяться вследствие инерционного взаимодействия звеньев, выраженного вторым слагаемым в (2.51). Полная кинетическая энергия при этом сохраняется: из (2.46) и (2.52) следует $E_{\text{к}}(t) = E_{\text{к}}(t_0)$.

Длина траектории в конфигурационном пространстве определяется метрикой g

$$\ell_g[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma, \dot\gamma)}\; dt. \tag{2.53}$$

На достаточно коротком участке геодезическая минимизирует эту длину между своими концами [71]. Длина (2.53) относится к кривой конфигураций $\gamma(t)$. Траекторию рабочего инструмента в рабочем пространстве получаем с помощью кинематического отображения p_n: его положение в момент t равно $p_n\big(\gamma(t)\big)$.

Введём приводные моменты τ_i в сочленениях, сохранив предположение об отсутствии гравитации и трения. На виртуальном перемещении с компонентами $\delta\theta_i$ приводы совершают виртуальную работу $\delta W = \sum_{i=1}^{n} \tau_i\ \delta\theta_i$. Таким образом, в каждой конфигурации управляющее воздействие задаёт линейный функционал на касательном пространстве, то есть ковектор [22]

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i\ d\theta_i \in T_\theta^* Q. \tag{2.54}$$

При переходе к другим локальным координатам $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ компоненты этого ковектора преобразуются по правилу

$$\tilde\tau_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \frac{\partial\theta_i}{\partial\varphi_\alpha}.$$

Тем самым значение виртуальной работы $\delta W = \tau(\delta\theta)$ сохраняется при замене координат.

При наличии приводных моментов уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = \tau_k, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{2.55}$$

Применяя к левой части (2.55) преобразования, выполненные при выводе (2.51), и умножая на обратную матрицу метрики, получаем

$$\ddot{\theta}_\ell + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = \sum_{k=1}^{n} g^{\ell k}(\theta)\tau_k, \qquad \ell = 1, \dots, n. \tag{2.56}$$

Левая часть (2.56) представляет ℓ-ю компоненту ковариантного ускорения. Из правой части следует, что умножение столбца компонент этого ускорения на матрицу $g(\theta)$ даёт столбец обобщённых моментов. Следовательно, в текущей конфигурации $\theta = \gamma(t)$ уравнение управляемого движения можно записать в форме

$$g_\theta\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, u\right) = \tau(u) \qquad \text{для любого } u \in T_\theta Q. \tag{2.57}$$

Невырожденность метрики обеспечивает единственность ковариантного ускорения, удовлетворяющего (2.57). При $\tau = 0$ получаем уравнение свободного движения (2.52). Полагая $u = \dot{\gamma}$ и используя соотношение (2.46), находим

$$\frac{dE_{\text{к}}}{dt} = \tau(\dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i\,\dot{\theta}_i. \tag{2.58}$$

Следовательно, скорость изменения кинетической энергии равна суммарной мощности приводов.

Для двухзвенного манипулятора матрица метрики задана формулой (2.34), а скоростное слагаемое $g(\theta)c\left(\theta, \dot{\theta}\right)$ вычислено в (2.47). Подставляя эти выражения в уравнение управляемого движения, получаем

$$g(\theta)\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right)\\ m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\,\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

При $\tau_1 = \tau_2 = 0$ система (2.59) описывает свободное движение

$$\begin{cases} g_{11}\ddot{\theta}_1 + g_{12}\ddot{\theta}_2 = m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right), \\ g_{12}\ddot{\theta}_1 + g_{22}\ddot{\theta}_2 = -m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\,\dot{\theta}_1^2. \end{cases} \tag{2.60}$$

При положительных массах и длинах звеньев матрица $g(\theta)$ положительно определена во всех конфигурациях. Поэтому система (2.60) однозначно определяет ускорения обоих сочленений по текущим значениям углов и скоростей.

Геометрическое уравнение (2.57) связывает приводные моменты с ковариантным ускорением манипулятора. Обратная матрица метрики определяет вклад управляющих моментов в обобщённые ускорения, а

коэффициенты связности Леви–Чивиты определяют слагаемые, квадратичные по скоростям сочленений. Разрешая (2.56) относительно обобщённых ускорений, получаем

$$\ddot{\theta}_\ell = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j + \sum_{k=1}^{n} g^{\ell k}(\theta)\tau_k, \qquad \ell = 1, \dots, n.$$

Эта форма используется в главе 3 для построения компенсирующей обратной связи и точной линеаризации динамики. Для манипулятора с независимым приводом в каждом сочленении невырожденность матрицы метрики позволяет по текущей конфигурации и скорости определить моменты, обеспечивающие заданное координатное ускорение. При точном знании параметров модели обратная связь компенсирует скоростные слагаемые, определяемые коэффициентами связности. Тогда обобщённым ускорением можно управлять непосредственно, задавая его по требуемой траектории и ошибке слежения.

Таким образом, метрика кинетической энергии и соответствующая ей связность Леви–Чивиты определяют геометрическую модель свободного и управляемого движения последовательного манипулятора. Свободному движению соответствуют геодезические конфигурационного пространства. При управляемом движении действие приводов задаётся ковектором обобщённых моментов, а обратная матрица метрики связывает его компоненты с компонентами ковариантного ускорения. В подразделе 2.7 модель используется для численной проверки свободной динамики, а в главе 3 для построения системы траекторного управления.

2.7 Исследование геометрической модели методом компьютерного моделирования

Исследуем свободное движение двухзвенного планарного манипулятора при трёх наборах начальных углов и скоростей сочленений. Для каждого случая оценим сохранение кинетической энергии вдоль рассчитанной траектории.

Рассматривается планарный манипулятор с двумя вращательными сочленениями, невесомыми жёсткими звеньями и сосредоточенными массами на их концах. Угол первого звена отсчитывается относительно неподвижного основания, угол второго относительно первого звена. При отсутствии гравитации, трения и управляющих моментов движение описывается геодезическими уравнениями, полученными в подразделе 2.6.

Для расчётов приняты массы $m_1 = m_2 = 1$ кг и длины звеньев $l_1 = l_2 = 1$ м. Численное интегрирование выполнено в MATLAB с использованием решателя ode45 на интервале от 0 до 20 с. Для основного расчёта результатов сохранения инвариантов заданы относительный допуск 10^{-11}, абсолютный допуск 10^{-13} и максимальный шаг 0,05 с. Рассмотрены три набора начальных условий, приведённые в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Начальные условия компьютерного моделирования

Расчётный случай	$q_1(0)$, рад	$q_2(0)$, рад	$\dot{q}_1(0)$, рад/с	$\dot{q}_2(0)$, рад/с
1	0	$\pi/3$	1	0
2	0	$\pi/3$	0	1
3	0	0	1	−0,5

Проверим полученное выражение для матрицы метрики на двухзвенной модели. При принятых массах и длинах звеньев аналитическое выражение метрики из подраздела 2.4 принимает вид

$$g(q) = \begin{pmatrix} 3 + 2\cos q_2 & 1 + \cos q_2 \\ 1 + \cos q_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

Компоненты метрики зависят только от относительного угла второго звена. Независимость от первой координаты соответствует неизменности кинетической энергии при общем повороте конфигурации в рабочей плоскости. На рисунке 2.3 представлены компоненты метрики, её определитель и наименьшее собственное значение для угла второго сочленения от $-\pi$ до π.

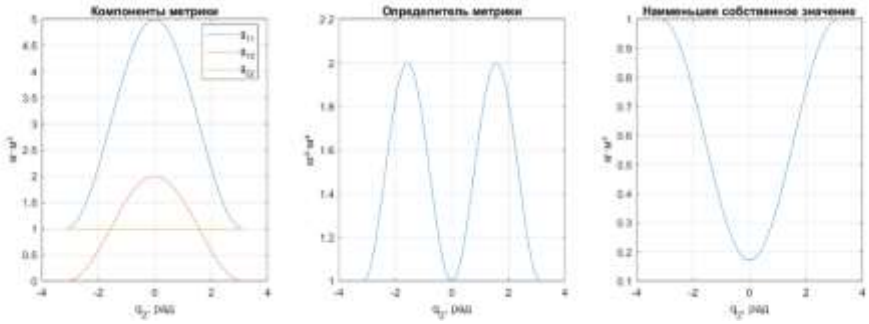

Рисунок 2.3 – Зависимость характеристик метрического тензора от конфигурации манипулятора

При принятых параметрах из (2.35) получаем $\det g = (3 + 2\cos q_2) - (1 + \cos q_2)^2 = 1 + \sin^2 q_2$.

Таким образом, определитель находится в пределах от 1 до 2 кг²·м⁴ и не обращается в нуль. Поскольку матрица симметрична и её ведущие главные миноры положительны, метрика положительно определена при любой конфигурации рассматриваемого манипулятора. Минимальное по конфигурациям собственное значение достигается при нулевом относительном угле: $\min_{q_2} \lambda_{\min}\big(g(q_2)\big) = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}171573$ кг · м$^2 > 0$.

Рассмотрим результаты моделирования свободного движения при различных начальных скоростях. В первом случае начальная угловая скорость задана только первому сочленению. За 20 с угол первого звена достигает приблизительно 18 рад. Второе сочленение также приходит в движение, хотя его

начальная скорость равна нулю (рисунок 2.4). Это проявление инерционной связи звеньев.

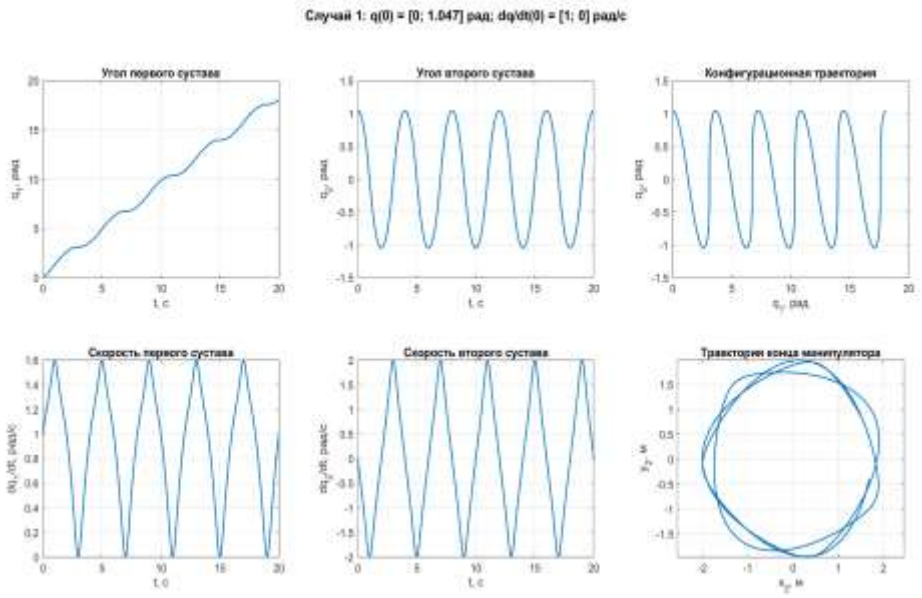

Рисунок 2.4 - Углы, угловые скорости и траектории манипулятора в первом расчётном случае

Во втором случае начальная угловая скорость задана только второму сочленению. Первое звено приходит в движение и на отдельных участках меняет направление вращения. К концу расчёта его угол достигает приблизительно 10,7 рад. Изменение взаимного положения звеньев приводит к появлению изгибов и самопересечений траектории конца манипулятора (рисунок 2.5).

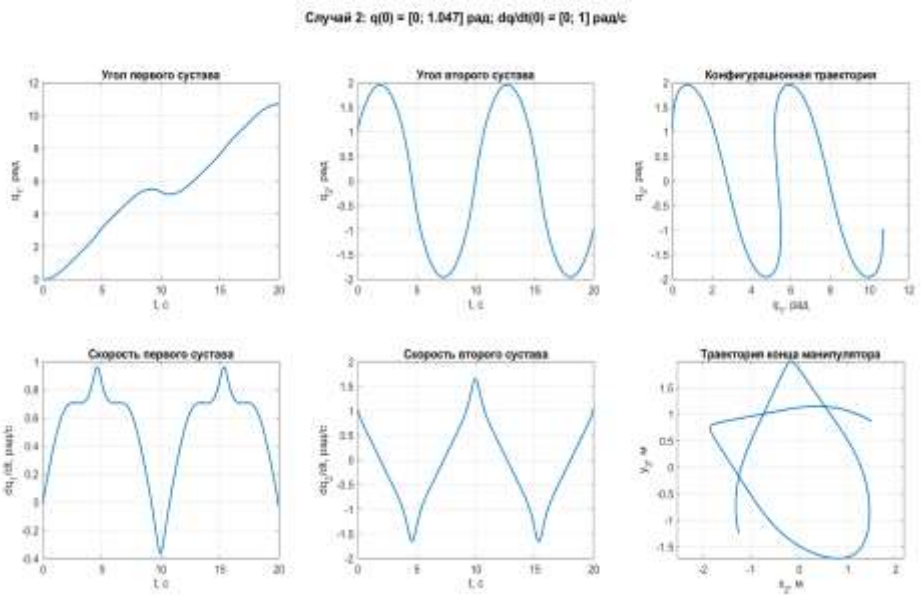

Рисунок 2.5 - Углы, угловые скорости и траектории манипулятора во втором расчётном случае

В третьем случае звенья первоначально расположены вдоль одной прямой, а начальные скорости сочленений имеют противоположные знаки. Относительный угол второго звена остаётся в пределах приблизительно ±0,28 рад. Поэтому расстояние от основания до конца манипулятора остаётся близким к сумме длин звеньев, и траектория в рабочей плоскости близка к окружности радиусом 2 м (рисунок 2.6).

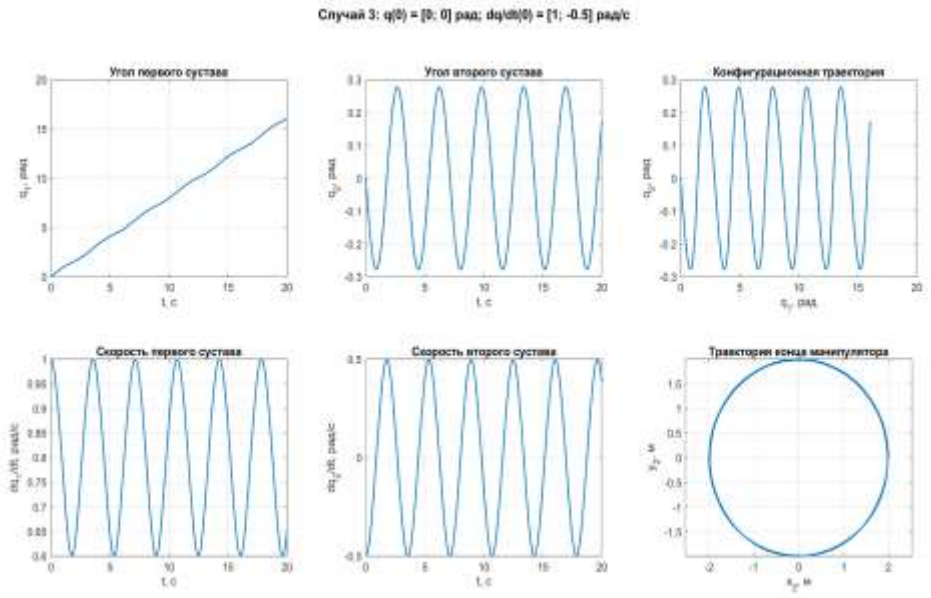

Рисунок 2.6 - Углы, угловые скорости и траектории манипулятора в третьем расчётном случае

На приведённых графиках первая угловая координата представлена без приведения к интервалу длиной 2π. Поэтому её значения могут превышать полный оборот. Геодезической является траектория в конфигурационном пространстве с метрикой $g(q)$; соответствующая ей кривая в декартовой рабочей плоскости в общем случае не является прямой линией. Форма декартовой траектории определяется как динамикой, так и нелинейным отображением прямой кинематики.

Проверим сохранение энергии при свободном движении. Для количественной проверки результатов вычислялась кинетическая энергия:

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathsf{T}}(t)g\big(q(t)\big)\dot{q}(t). \tag{2.62}$$

Для каждого расчётного случая определим относительное отклонение энергии от её начального значения

$$\delta_E(t) = \frac{E(t)-E(0)}{E(0)}. \tag{2.63}$$

На рисунке 2.7 показано относительное отклонение энергии во времени для трёх наборов начальных условий.

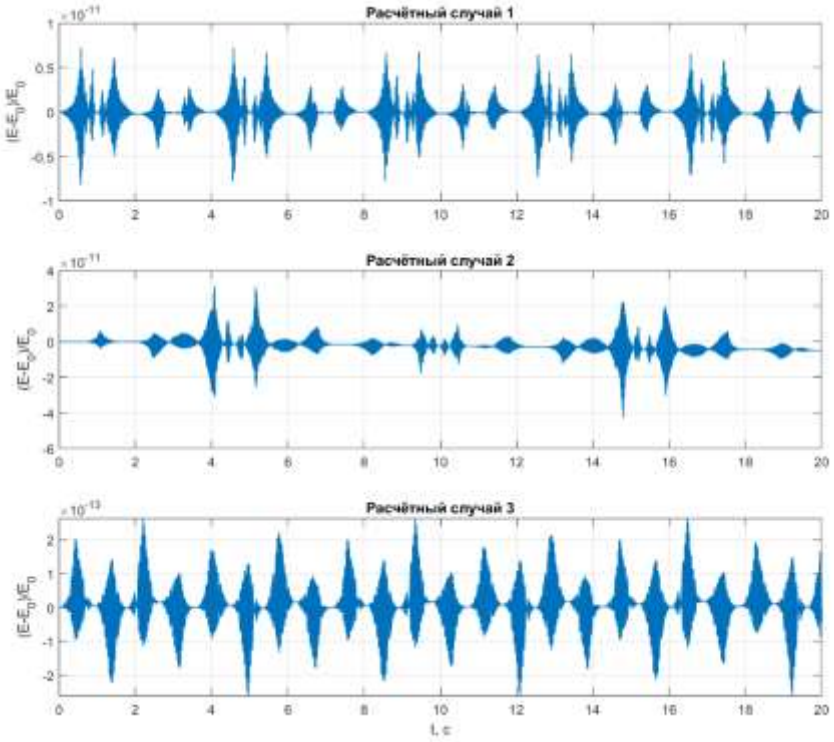

Рисунок 2.7 – Отклонения кинетической энергии во времени

Максимальное по моментам регистрации относительное отклонение кинетической энергии определим по формулеt_k

$$\varepsilon_E = \max_k |\delta_E(t_k)| = \max_k \frac{|E(t_k) - E(0)|}{E(0)}. \quad (2.64)$$

Результаты для трёх наборов начальных условий приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Показатели сохранения кинетической энергии

Расчётный случай	Начальная энергия, Дж	Максимальное относительное отклонение энергии
1	2	$8{,}2111 \cdot 10^{-12}$
2	0,5	$4{,}29 \cdot 10^{-11}$
3	1,625	$2{,}635 \cdot 10^{-13}$

Наибольшее относительное отклонение энергии за 20 с составило $4{,}289 \cdot 10^{-11}$ во втором расчётном случае.

При одинаковой исходной конфигурации начальное движение одного сочленения вызывает изменение скорости другого вследствие инерционной связи звеньев. Движение из выпрямленной конфигурации иллюстрирует невырожденность матрицы метрики при потере ранга якобиана рабочего инструмента. В главе 3 матрица метрики и скоростные слагаемые используются для вычисления приводных моментов при траекторном управлении.

Выводы по разделу 2

Для последовательного манипулятора с вращательными сочленениями получена процедура определения линейных скоростей точечных масс. Положение каждого звена выражено через произведение экспонент. Присоединённые преобразования определяют столбцы пространственного якобиана, а переход от твиста звена к скорости точки даёт линейный якобиан массы. По линейным якобианам и массам построен метрический тензор конфигурационного пространства. Установлено условие его положительной определённости: при любой ненулевой обобщённой скорости должна двигаться хотя бы одна масса. Для двухзвенного планарного манипулятора это условие выполняется во всех конфигурациях при положительных массах и длинах звеньев, в том числе при коллинеарном расположении звеньев. Через связность Леви–Чивиты получены уравнения свободного и управляемого движения. При отсутствии гравитации, трения и управляющих моментов ковариантное ускорение равно нулю, и движение описывается геодезической метрики кинетической энергии. При действии приводов ковариантное ускорение определяется обобщёнными управляющими моментами посредством обратной метрики. Для трёх наборов начальных условий исследовано свободное движение двухзвенного манипулятора. На интервале от 0 до 20 с максимальное относительное отклонение кинетической энергии от начального значения составило $4{,}289 \cdot 10^{-11}$, что согласуется с законом сохранения энергии для рассматриваемой модели.

В задаче роботизированной обработки поверхности исходными данными для построения пути рабочего инструмента служит геометрическая модель детали. Для её получения при участии автора разработана программа для ЭВМ «Восстановление поверхности по данным сканирования» (свидетельство № 38548 от 21 августа 2023 года, приложение Б). Восстановление поверхности по результатам сканирования описано в работе [31], а построение пути рабочего инструмента с использованием геодезического расстояния на поверхности детали описано в работе [30]. После задания закона движения инструмента вдоль построенного пути и определения соответствующей траектории в суставных координатах возникает задача управления движением манипулятора.

Для решения этой задачи в разделе 2 получено бескоординатное уравнение динамики, связывающее ковариантное ускорение манипулятора с обобщёнными моментами приводов. Тем самым обосновано первое научное положение диссертации - геометрическая модель динамики последовательного манипулятора, конфигурационное пространство которого представлено как риманово многообразие с метрикой, определяемой кинетической энергией. Полученное уравнение служит основой для синтеза закона траекторного управления в разделе 3.

3 МЕТОД ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ НА ОСНОВЕ ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

3.1 Постановка задачи траекторного управления последовательным роботом-манипулятором

Одной из основных задач управления последовательными роботами-манипуляторами является обеспечение точного воспроизведения заданной траектории движения при соблюдении требований к устойчивости и динамическим характеристикам механической системы. Решение данной задачи осложняется нелинейностью уравнений движения, взаимосвязанностью обобщённых координат и зависимостью инерционных характеристик от текущей конфигурации манипулятора. В связи с этим построение системы траекторного управления требует использования математической модели, учитывающей геометрические и динамические свойства объекта управления.

Нелинейные методы управления манипуляторами и их технологические применения рассмотрены в обзоре [66]. Среди методов, исследованных в работе [67], для поставленной задачи выбрана линеаризация обратной связью.

Рассмотрим последовательный робот-манипулятор с n степенями свободы. Его конфигурация определяется точкой конфигурационного многообразия Q, а в выбранной локальной системе координат - вектором обобщённых координат $\theta = (\theta^1 \quad \dots \quad \theta^n)^T$.

Кинетическая энергия манипулятора задаёт положительно определённую риманову метрику g. Движение под действием управляющих моментов описывается геометрическим уравнением (2.57)

$$\nabla_{\dot{\theta}}\dot{\theta} = F, \tag{3.1}$$

где ∇ - связность Леви-Чивиты метрики g, $\dot{\theta}$ - обобщённая скорость, F - вектор, получаемый из ковектора управляющих моментов посредством обратного метрического тензора. В выбранных координатах

$$F^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}(\theta)\tau_j, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

где τ_j - момент привода j-го сустава, g^{ij} - компоненты обратного метрического тензора.

В подразделах 3.1-3.5 рассматривается движение без гравитационных моментов, трения и внешних возмущений. Случай вертикального движения с точной компенсацией силы тяжести рассматривается в подразделе 3.6.

Предполагается, что каждый сустав снабжён независимым приводом, текущие координаты и скорости доступны регулятору, а параметры модели известны. При теоретическом синтезе ограничения моментов не учитываются. Возможность реализации вычисленных воздействий должна проверяться при выборе коэффициентов регулятора с учётом характеристик приводов.

Пусть задана дважды непрерывно дифференцируемая траектория $\theta_d(t)$. Ошибка положения определяется разностью заданных и фактических обобщённых координат:

$$e(t) = \theta_d(t) - \theta(t). \tag{3.3}$$

Соответственно, ошибка скорости и её производная имеют вид

$$\dot{e} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}, \qquad \ddot{e} = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}. \tag{3.4}$$

Вычитание координат выполняется в одной согласованной координатной области. Для вращательных суставов допускается использование непрерывно развёрнутых углов, исключающее искусственные скачки ошибки при переходе через границу выбранного представления угла.

Задача управления заключается в определении управляющих моментов $\tau(t)$ по заданной траектории, текущим обобщённым координатам и скоростям, обеспечивающих при принятых предположениях выполнение условий

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{e}(t) = 0. \tag{3.5}$$

Дополнительно требуется установить условия устойчивости замкнутой системы и определить влияние параметров регулятора на скорость затухания ошибки и величину управляющих моментов.

Синтез выполняется в суставных координатах. Построение заданной суставной траектории по движению рабочего инструмента относится к задаче обратной кинематики и в настоящей главе отдельно не рассматривается.

3.2 Координатное представление геометрического уравнения динамики манипулятора

В обобщённых координатах уравнение (3.1) записывается следующим образом:

$$\ddot{\theta}^{\,i} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i}(\theta)\dot{\theta}^{\,j}\dot{\theta}^{\,k} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}(\theta)\tau_j, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

Коэффициенты связности определяются компонентами метрического тензора по формуле (2.42):

$$\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} g^{i\ell}\left(\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial \theta^{j}} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial \theta^{k}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta^{\ell}}\right). \tag{3.7}$$

Для сокращения записи введём функции

$$h^{i}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i}(\theta)\dot{\theta}^{\,j}\dot{\theta}^{\,k}. \tag{3.8}$$

Они объединяют нелинейные скоростные слагаемые, обусловленные геометрией конфигурационного пространства. Тогда

$$\ddot{\theta}^{\,i} = -h^i\left(\theta, \dot{\theta}\right) + \sum_{j=1}^{n} g^{ij}\,(\theta)\tau_j. \qquad (3.9)$$

Таким образом, в выбранных обобщённых координатах геометрическое уравнение динамики выражается через компоненты обратного метрического тензора и скоростные слагаемые, определяемые связностью Леви–Чивиты. Положительная определённость метрики обеспечивает её невырожденность. При независимом моментном управлении каждым суставом это позволяет построить обратную связь, компенсирующую скоростные слагаемые и обеспечивающую заданное командное ускорение.

3.3 Точная линеаризация динамики манипулятора посредством обратной связи

В работе [68] классический метод вычисляемых моментов для последовательных манипуляторов рассмотрен как частный случай траекторного управления дифференциально плоскими системами. В данном подразделе закон линеаризующей обратной связи получим из геометрического уравнения динамики.

Введём командное ускорение $a_0 = (a_0^1 \quad \cdots \quad a_0^n)^T$.

Выберем моменты приводов в виде:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,(\theta)\left(a_0^j + h^j\left(\theta, \dot{\theta}\right)\right), \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (3.10)$$

Этот закон формируется по текущим координатам, скоростям и командному ускорению. Подстановка (3.10) в уравнение (3.6) приводит к равенству

$$\ddot{\theta}^{\,i} + h^i = \sum_{j,m=1}^{n} g^{ij}\, g_{jm}(a_0^m + h^m). \qquad (3.11)$$

Используя соотношение между метрическим тензором и обратным ему тензором, $\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\, g_{jm} = \delta_m^i$, получаем $\ddot{\theta}^{\,i} + h^i = a_0^i + h^i$.

После сокращения скоростных слагаемых имеем

$$\ddot{\theta} = a_0. \qquad (3.12)$$

Следовательно, при точном соответствии модели объекту управляющая обратная связь преобразует нелинейную динамику манипулятора в систему независимых двойных интеграторов.

Преобразование управления обратимо, поскольку

$$\frac{\partial \tau}{\partial a_0} = g(\theta), \qquad \det g(\theta) > 0. \qquad (3.13)$$

Полученная линеаризация является точной при принятых предположениях и не представляет собой приближение в окрестности положения равновесия. Нелинейные зависимости сохраняются в вычислении управляющих моментов, но компенсируются в уравнении движения замкнутой внутренней системы.

Закон (3.10) задаёт блок обратной динамики

$$\tau = \mathcal{K}\left(\theta, \dot{\theta}, a_0\right). \tag{3.14}$$

По своей структуре такое управление соответствует методу вычисляемого момента - Computed Torque Control (CTC) [70]. В рассматриваемом построении компенсирующее воздействие получено непосредственно из геометрического уравнения динамики через метрический тензор и связность.

При этом точная линеаризация управляемого движения не означает приведения метрического тензора к евклидовому виду или исчезновения кривизны конфигурационного пространства. Полученный результат относится к динамике системы после введения управляющей обратной связи.

3.4 Синтез регулятора траекторного управления на основе линеаризованной модели

После линеаризации внутреннего контура задача управления сводится к выбору командного ускорения a_0, обеспечивающего требуемую динамику ошибки. Командное ускорение зададим в виде

$$a_0 = \ddot{\theta}_d - Ue, \tag{3.15}$$

где U - линейный дифференциальный оператор формирования корректирующего воздействия.

Из определения ошибки и равенства (3.12) следует

$$\ddot{e} = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta} = Ue. \tag{3.16}$$

Выберем оператор U в виде

$$Ue = -K_d\dot{e} - K_p e, \tag{3.17}$$

где $K_p = \mathrm{diag}\left(k_{p,1}, \dots, k_{p,n}\right)$, $K_d = \mathrm{diag}\left(k_{d,1}, \dots, k_{d,n}\right)$, а все диагональные элементы положительны. Тогда командное ускорение определяется выражением

$$a_0 = \ddot{\theta}_d + K_d\dot{e} + K_p e. \tag{3.18}$$

Положительные знаки перед корректирующими слагаемыми обусловлены принятым определением ошибки $e = \theta_d - \theta$.

Полный закон траекторного управления имеет вид

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(\theta)\left(\ddot{\theta}_d^{\,j} + k_{d,j}\dot{e}^{\,j} + k_{p,j}e^j + h^j\left(\theta,\dot{\theta}\right)\right). \quad (3.19)$$

Замкнутая динамика ошибки описывается уравнением

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0. \quad (3.20)$$

При диагональных матрицах коэффициентов каналы ошибки независимы:

$$\ddot{e}^{\,i} + k_{d,i}\dot{e}^{\,i} + k_{p,i}e^i = 0. \quad (3.21)$$

Коэффициенты регулятора удобно определять через желаемую собственную частоту $\lambda_i > 0$ и коэффициент демпфирования $\zeta_i > 0$:

$$k_{p,i} = \lambda_i^2, \qquad k_{d,i} = 2\zeta_i\lambda_i. \quad (3.22)$$

При $\zeta_i = 1$ оба корня характеристического полинома равны $-\lambda_i$. Уравнение ошибки принимает критически демпфированный вид

$$\ddot{e}^{\,i} + 2\lambda_i\dot{e}^{\,i} + \lambda_i^2 e^i = 0. \quad (3.23)$$

Увеличение λ_i ускоряет затухание ошибки. Вместе с тем при ненулевом начальном рассогласовании возрастают корректирующие составляющие командного ускорения и могут увеличиваться пиковые моменты приводов. Поэтому выбор коэффициентов должен учитывать одновременно требования к переходному процессу и допустимые управляющие воздействия.

Критическое демпфирование исключает колебательные собственные моды, однако не гарантирует монотонного изменения ошибки при произвольной начальной ошибке скорости. Характер переходного процесса определяется как коэффициентами регулятора, так и начальными условиями.

Система управления содержит два функционально связанных контура. Во внешнем контуре вычисляются ошибки положения и скорости и формируется командное ускорение по (3.18). Во внутреннем контуре блок обратной динамики преобразует это ускорение в моменты приводов по (3.10). Таким образом, внешний регулятор задаёт требуемую динамику ошибки, а внутренний контур обеспечивает её реализацию при точном соответствии модели объекту. Структура системы приведена на рисунке 3.1. Обратная связь по координатам и скоростям используется как при формировании ошибки, так и при вычислении моментов в блоке обратной динамики.

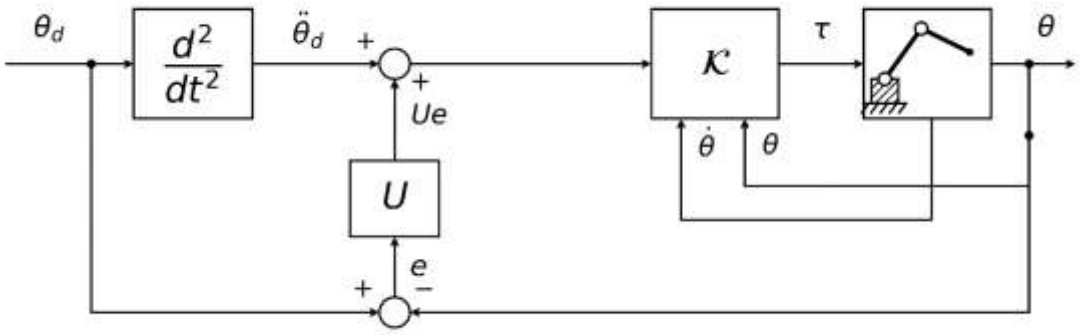

Рисунок 3.1 - Структура траекторного управления на основе точной линеаризации геометрического уравнения динамики

3.5 Устойчивость и сходимость ошибки траекторного управления

Обратная связь, построенная на основе метрического тензора и связности Леви–Чивиты, при точной компенсации динамики обеспечивает равенство $\ddot{\theta} = a_0$. Регулятор (3.18) формирует линейную динамику ошибки $e = \theta_d - \theta$, описываемую уравнением (3.20). Это позволяет установить устойчивость по корням характеристического уравнения.

Выберем одинаковую настройку регулятора для всех суставов:

$$K_p = \lambda^2 I_n, \qquad K_d = 2\lambda I_n, \qquad \lambda > 0, \tag{3.24}$$

где I_n – единичная матрица порядка n, а λ – параметр, определяющий скорость затухания ошибки. Такая настройка соответствует критическому демпфированию и используется в моделировании в подразделе 3.6.

Для каждого сустава уравнение ошибки принимает вид

$$\ddot{e}_i + 2\lambda\dot{e}_i + \lambda^2 e_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3.25}$$

Его характеристическое уравнение имеет два совпадающих отрицательных корня:

$$s^2 + 2\lambda s + \lambda^2 = (s + \lambda)^2 = 0, \qquad s_1 = s_2 = -\lambda < 0. \tag{3.26}$$

Следовательно, при $\lambda > 0$ нулевое состояние ошибки положения и скорости экспоненциально устойчиво.

Решение уравнения (3.25) при заданных начальных условиях записывается как

$$e_i(t) = [e_i(0) + (\dot{e}_i(0) + \lambda e_i(0))t]e^{-\lambda t}. \tag{3.27}$$

Соответствующая ошибка скорости определяется выражением

$$\dot{e}_i(t) = [\dot{e}_i(0) - \lambda(\dot{e}_i(0) + \lambda e_i(0))t]e^{-\lambda t}. \quad (3.28)$$

Поскольку при $\lambda > 0$ функции $e^{-\lambda t}$ и $te^{-\lambda t}$ стремятся к нулю, ошибки положения и скорости затухают. При согласованных начальных условиях $e(0) = 0$, $\dot{e}(0) = 0$ система точно воспроизводит заданную траекторию. При начальном рассогласовании возникает устойчивый переходный процесс, форма которого определяется начальными ошибками и параметром λ.

Если начальная ошибка скорости равна нулю, модуль ошибки положения уменьшается монотонно. При ненулевой начальной ошибке скорости возможно временное увеличение отклонения с последующим затуханием. Увеличение λ ускоряет затухание собственных составляющих ошибки; его выбор согласуется с допустимыми моментами приводов.

Для перехода к исследованию неопределённостей обозначим остаточное ускорение через $d(t) = \ddot{\theta}(t) - a_0(t)$. Тогда

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = -d(t). \quad (3.29)$$

Устойчивость линейного контура обеспечивает ограниченность ошибок при ограниченном $d(t)$. Повышение точности слежения в этих условиях посредством робастной и адаптивной коррекции рассматривается в главе 4.

Таким образом, геометрическая модель позволяет построить компенсирующую обратную связь, а настройка (3.24) обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибок положения и скорости при точной компенсации динамики. Полученные решения служат основой для проверки системы управления и выбора коэффициентов регулятора в вычислительных экспериментах.

3.6 Компьютерное моделирование системы траекторного управления двухзвенным манипулятором

В подразделе 3.5 получены аналитические решения ошибок положения и скорости и установлена их экспоненциальная сходимость при точной компенсации динамики. В настоящем подразделе эти результаты проверяются на нелинейной модели двухзвенного манипулятора. Исследуются соответствие численного решения аналитическому, влияние настройки регулятора и начальных условий на переходный процесс.

Объектом исследования является двухзвенный планарный манипулятор с двумя вращательными сочленениями. Звенья считаются невесомыми и абсолютно жёсткими, их длины составляют $l_1 = l_2 = 1$ м. На концах звеньев расположены сосредоточенные массы $m_1 = m_2 = 1$ кг. Координата θ_1 определяет угол первого звена относительно горизонтального направления, а θ_2 определяет угол второго звена относительно первого.

Моделирование выполняется в MATLAB/Simulink. В отличие от рассмотрения в подразделе 3.5, движение осуществляется в вертикальной плоскости с учётом гравитации и её точной компенсацией в регуляторе. Трение

и внешние возмущения отсутствуют; параметры модели регулятора совпадают с параметрами объекта. Уравнение движения и закон управления имеют вид

$$g(\theta)\left[\ddot{\theta} + h\left(\theta, \dot{\theta}\right)\right] + \tau_g(\theta) = \tau,$$
$$\tau = g(\theta)\left[a_0 + h\left(\theta, \dot{\theta}\right)\right] + \tau_g(\theta),$$

где $\tau_g(\theta)$ – вектор гравитационных слагаемых, τ – полный вектор моментов приводов. При точной компенсации сохраняется равенство $\ddot{\theta} = a_0$, поэтому аналитическое решение ошибки из подраздела 3.5 применимо и к данному эксперименту. Продолжительность моделирования составляет $T = 20$ с; коэффициенты регулятора выбираются согласно (3.24).

На каждом шаге моделирования регулятор вычисляет командное ускорение по ошибкам положения и скорости. Блок обратной динамики преобразует его в управляющие моменты, под действием которых определяется движение нелинейного объекта. Полученные координаты используются для вычисления ошибки слежения и её сопоставления с аналитическим решением (3.27).

Заданная траектория имеет вид

$$\theta_d(t) = \begin{bmatrix} 0{,}5\sin t \\ \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Заданные скорости и ускорения вычисляются аналитически. Ошибка определяется как $e = \theta_d - \theta$, а командное ускорение формируется по (3.18). Для сопоставления результатов заданные координаты и аналитическая ошибка вычисляются на временной сетке зарегистрированного движения.

Первый эксперимент направлен на сопоставление ошибки слежения нелинейной замкнутой системы с аналитическим решением (3.27). Принимается настройка $\lambda = 6$ с$^{-1}$, которой соответствуют

$$K_p = 36I_2, \qquad K_d = 12I_2.$$

Начальные положения и скорости задаются следующим образом:

$$\theta(0) = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}2 \end{bmatrix} \text{ рад}, \qquad \dot{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ рад/с}.$$

Для выбранной траектории начальные ошибки составляют

$$e(0) = \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ рад}, \qquad \dot{e}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ рад/с}.$$

Соответствие численного и аналитического решений оценивается по величине

$$\Delta e_{\max,i} = \max_{t\in[0,T]} \left| e_{i,\text{sim}}(t) - e_{i,\text{an}}(t) \right|, \qquad i = 1,2,$$

где $e_{i,\text{sim}}$ - ошибка, полученная при моделировании; $e_{i,\text{an}}$ - аналитическое решение (3.27). При обработке результатов максимум определяется по зарегистрированным отсчётам.

На рисунке 3.2 представлена разность численного и аналитического значений ошибки. Эта величина характеризует соответствие двух решений, а не отклонение фактических координат от заданной траектории.

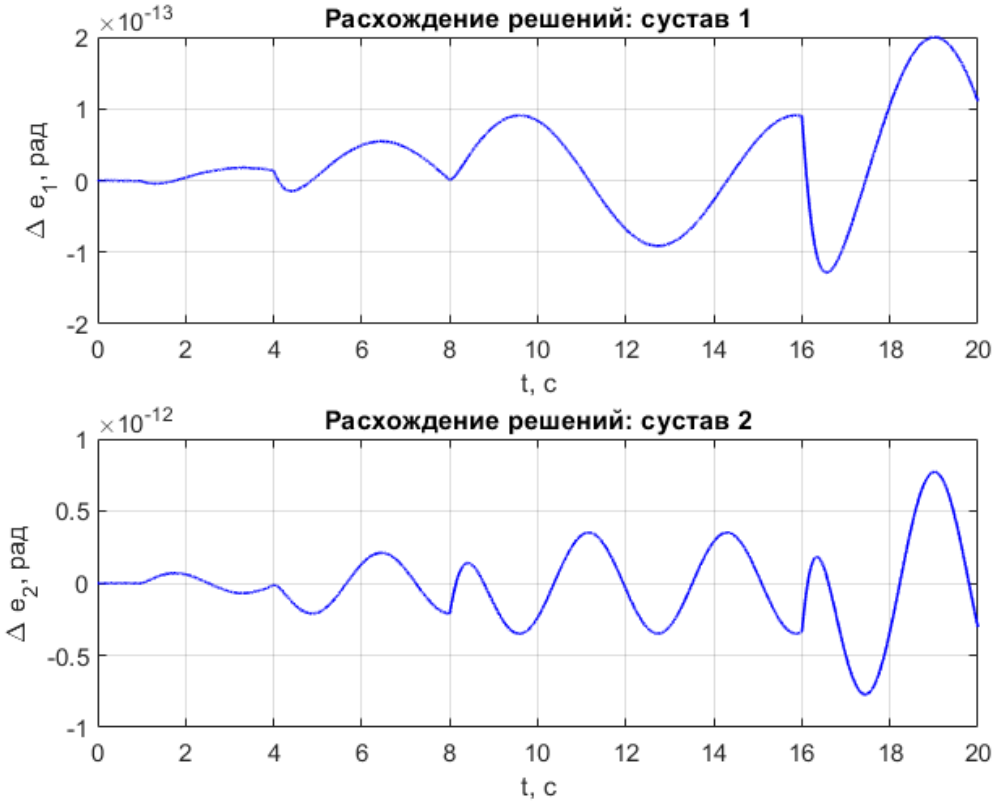

Рисунок 3.2 - Расхождение между численной ошибкой слежения и аналитическим решением

Максимальные абсолютные расхождения составили $2{,}004924 \cdot 10^{-13}$ рад для первого сустава и $7{,}721046 \cdot 10^{-13}$ рад для второго. Полученное совпадение подтверждает корректность реализации компенсирующей обратной связи и воспроизведение заданной линейной динамики ошибки в рассматриваемой математической модели.

Во втором эксперименте исследуется влияние параметра λ на продолжительность переходного процесса и величину управляющих моментов. Физические параметры манипулятора, заданная траектория и начальные условия сохраняются такими же, как в первом эксперименте. Рассматриваются настройки $\lambda = 2,\ 4,\ 6\ \text{с}^{-1}$.

Быстродействие оценивается по времени установления ошибки положения. Для всех настроек используется одинаковый допуск $\delta_e = 0{,}005$ рад. Время

установления определяется как первый момент, после которого модуль ошибки остаётся в заданной полосе до окончания расчёта:

$$t_{s,i} = \inf\{t \in [0,T]: |e_i(\xi)| \le \delta_e \text{ для всех } \xi \in [t,T]\}.$$

При обработке дискретных данных условие проверяется по зарегистрированным отсчётам. Если оно не выполняется, установление на рассматриваемом интервале считается недостигнутым.

Для оценки управляющего воздействия определяется пиковый момент каждого привода:

$$\tau_{\text{peak},i} = \max_{t\in[0,T]} |\tau_i(t)|.$$

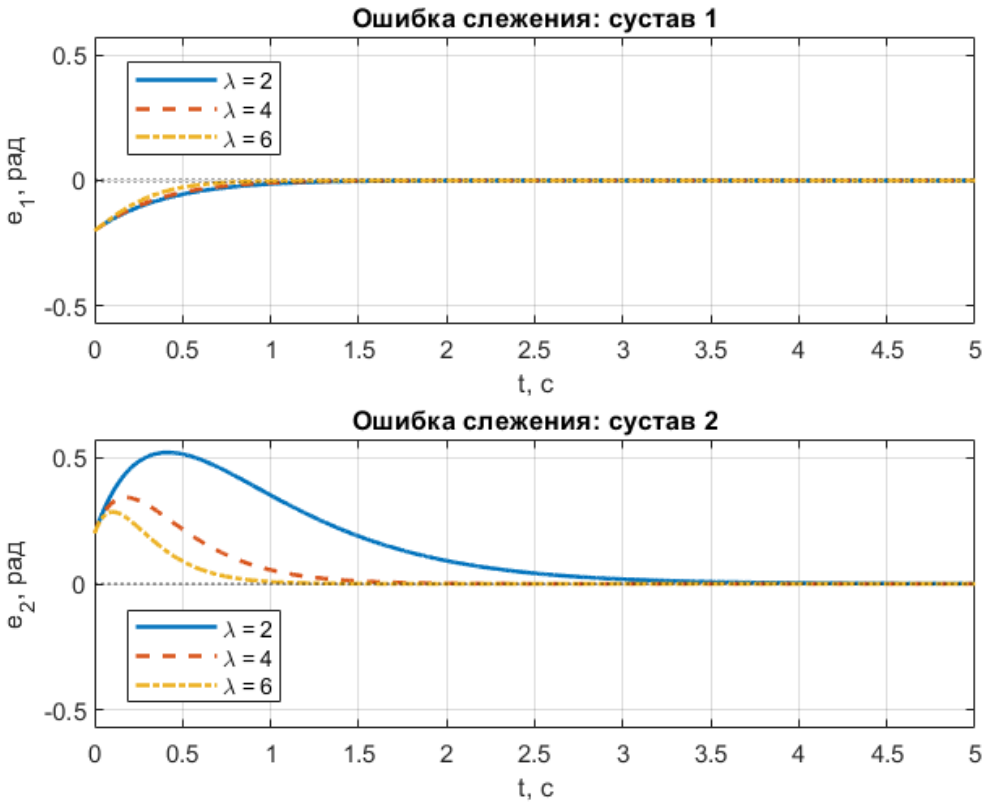

Рисунок 3.3 - Влияние коэффициентов регулятора на переходные процессы ошибок слежения

На рисунке 3.4 представлены полные управляющие моменты, включая гравитационную компенсацию. Их сопоставление позволяет оценить изменение нагрузки на приводы при повышении быстродействия.

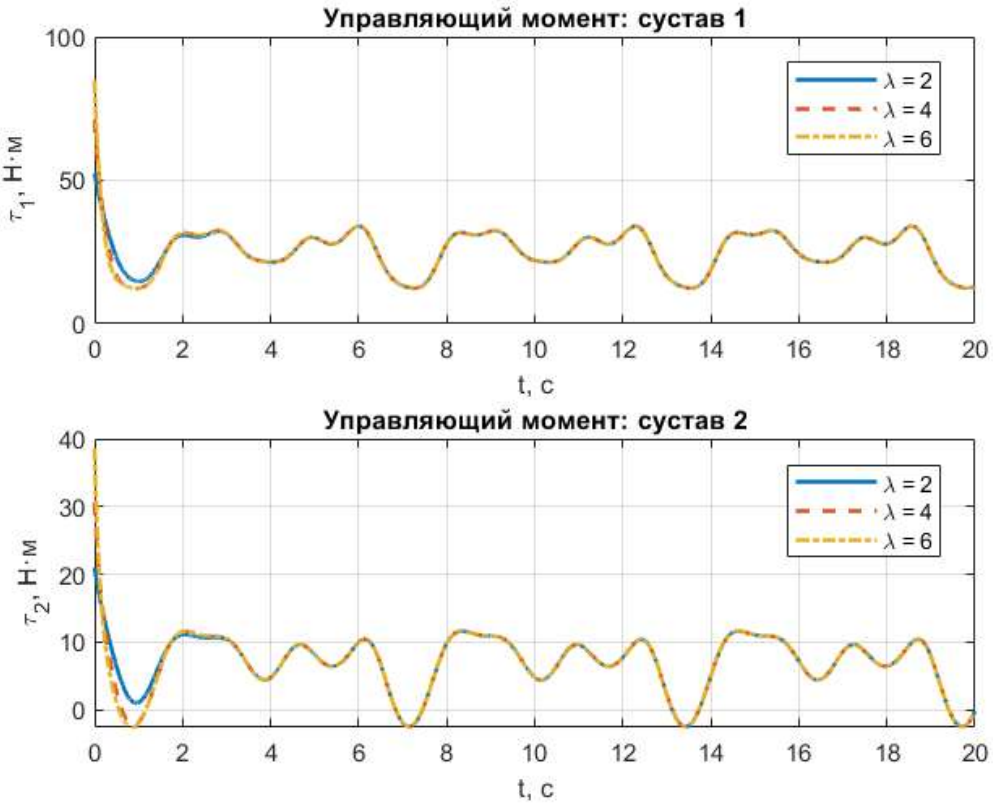

Рисунок 3.4 - Управляющие моменты при различных коэффициентах регулятора

Настройки и результаты расчётов представлены в таблице 3.1. Здесь $K_p = k_p I_2$, $K_d = k_d I_2$.

Таблица 3.1 - Влияние настройки регулятора на быстродействие и пиковые управляющие моменты

λ, с$^{-1}$	k_p, с$^{-2}$	k_d, с$^{-1}$	$t_{s,1}$, с	$t_{s,2}$, с	$\tau_{\text{peak},1}$, Н·м	$\tau_{\text{peak},2}$, Н·м
2	4	4	1,3114	3,7604	52,416	20,986
4	16	8	1,177	1,729	71,024	30,594
6	36	12	0,84463	1,1026	84,865	38,634

Увеличение λ от 2 до 6 с$^{-1}$ сократило время установления ошибки обоих суставов. Наибольшее быстродействие среди исследованных настроек обеспечено при $\lambda = 6$ с$^{-1}$: время установления составило приблизительно 0,845 и 1,103 с. При этом пиковые моменты увеличились до 84,865 и 38,634 Н·м. Полученные результаты позволяют выбирать коэффициенты регулятора с учётом требуемой продолжительности переходного процесса и возможностей приводов.

Третий эксперимент проводится при фиксированной настройке $\lambda = 6$ с$^{-1}$. Исследуются три сочетания начальных положений и скоростей, приведённые в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Начальные условия для исследования переходных процессов

Случай	$\theta(0)$, рад	$\dot{\theta}(0)$, рад/с	Характер начальных условий
1	$[0;\ 0]$	$[0{,}5;\ 2]$	Начальное согласование
2	$[0{,}2;\ -0{,}2]$	$[0{,}5;\ 2]$	Рассогласование по положению
3	$[0{,}2;\ -0{,}2]$	$[0;\ 0]$	Рассогласование по положению и скорости

Третий случай соответствует начальным условиям первого эксперимента. Здесь он используется для сравнения формы переходного процесса с двумя другими случаями.

Расчёты выполняются в модели twolink_CTC с использованием решателя ode45 с переменным шагом. Заданы относительная погрешность 10^{-9}, абсолютная погрешность 10^{-11} и максимальный шаг интегрирования 0,001 с. Во всех трёх запусках сохраняются одинаковые заданная траектория, коэффициенты регулятора и настройки решателя.

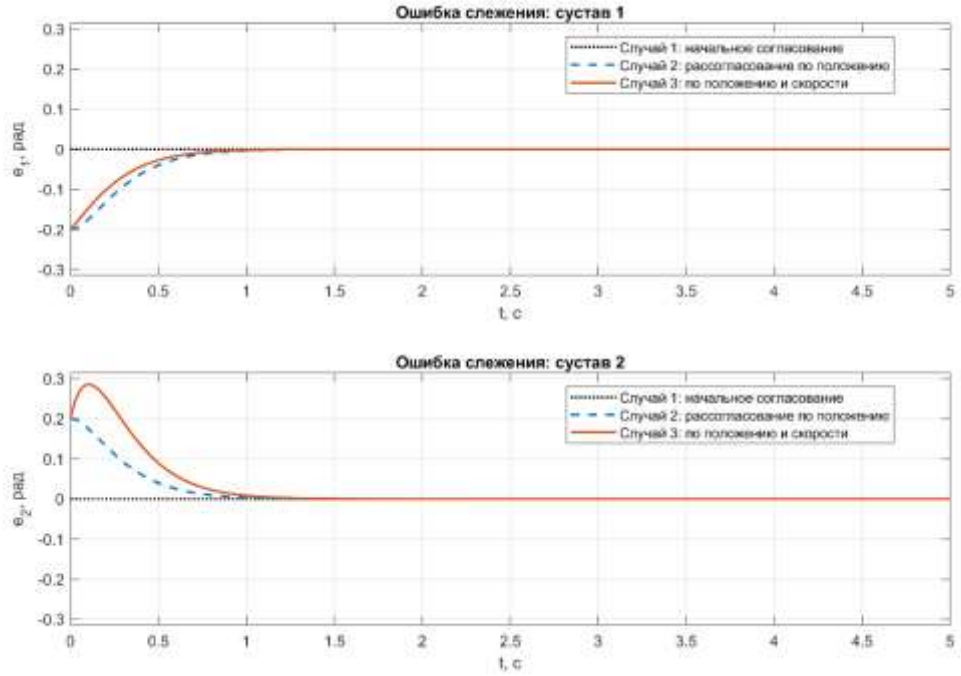

Рисунок 3.5 - Влияние начального рассогласования на ошибки слежения

При согласованных начальных положениях и скоростях аналитическая ошибка тождественно равна нулю. Результаты моделирования показывают воспроизведение заданного движения с малыми отклонениями, обусловленными численным расчётом.

При рассогласовании только по положению модули ошибок обоих суставов монотонно уменьшаются, что соответствует решению (3.27) при $\dot{e}(0) = 0$. Дополнительное рассогласование по скорости изменяет начальный участок переходного процесса. Во втором суставе наблюдается первоначальное увеличение ошибки с последующим затуханием; ошибка первого сустава

приближается к нулю без изменения знака. Такое поведение согласуется с аналитическим решением и сохраняет установленную сходимость.

Для третьего случая дополнительно представлены заданные и фактические координаты на полном интервале моделирования.

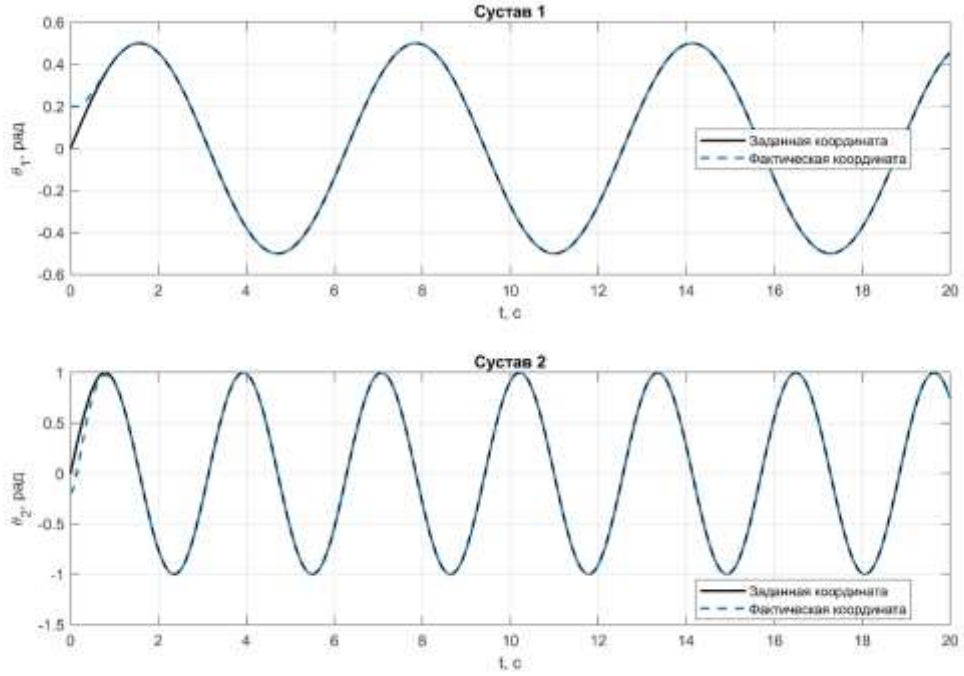

Рисунок 3.6 - Заданные и фактические углы при начальном рассогласовании по положению и скорости

После завершения переходного процесса фактические координаты следуют заданным зависимостям. Таким образом, выбранная настройка регулятора обеспечивает устранение рассмотренных начальных рассогласований и выход манипулятора на заданную траекторию.

Моделирование подтвердило соответствие численной ошибки аналитическому решению, полученному в подразделе 3.5, и выход манипулятора на заданную траекторию при рассмотренных начальных условиях. Увеличение параметра настройки сокращает время установления ошибки, сопровождаясь ростом пиковых управляющих моментов. Начальное рассогласование определяет форму переходного процесса при сохранении сходимости. Полученные результаты подтверждают реализацию синтезированного закона управления при точной компенсации динамики, включая гравитацию, и служат основой для исследования неопределённостей и внешних возмущений в главе 4.

Выводы по разделу 3

На основе геометрического уравнения динамики, полученного в разделе 2, построен закон траекторного управления, формирующий линейную динамику ошибки слежения. Для рассматриваемого закона управления аналитически обоснована экспоненциальная сходимость ошибок положения и скорости к нулю при точной компенсации динамики в выбранном координатном представлении.

Компьютерное моделирование двухзвенного манипулятора с учётом и точной компенсацией гравитации подтвердило соответствие численной ошибки аналитическому решению. Во всех рассмотренных случаях начального рассогласования обеспечен выход на заданную траекторию. Полученные результаты подтверждают корректность реализации компенсирующей обратной связи и согласованность геометрического описания динамики с поведением замкнутой системы.

Результаты исследований нелинейного управления манипуляторами отражены в обзорной статье [66] и в работе об адаптивных и нелинейных методах управления [67]. Связь метода вычисляемых моментов с линеаризацией дифференциально плоских систем установлена в публикации [68].

Полученные результаты обосновывают второе научное положение: выполнена точная линеаризация уравнений динамики последовательного манипулятора в геометрической форме посредством обратной связи и построена система траекторного управления на её основе. Разработанный закон управления служит основой для робастного и адаптивно-робастного расширений, исследуемых в главе 4.

4 ИССЛЕДОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ

4.1 Постановка задачи адаптивного траекторного управления в условиях параметрической неопределённости и внешних возмущений

Принципы адаптивного управления манипуляторами систематизированы в обзоре [52]. Для двухзвенного манипулятора в работе [53] исследована система, объединяющая PID-регулятор и адаптивное управление с эталонной моделью. В настоящей главе рассмотрим задачу адаптации системы с линеаризующей обратной связью при неточных параметрах модели и внешних возмущающих моментах.

Сохраним принятые ранее обозначения: θ - вектор обобщённых координат, $g_{ij}(\theta)$ - компоненты метрического тензора кинетической энергии, $h^i(\theta, \dot{\theta})$ - скоростные составляющие геометрического уравнения динамики, определённые через символы Кристоффеля. Для двухзвенного манипулятора полученный в третьей главе закон управления имеет вид

$$a_0 = \ddot{\theta}_d - Ue, \qquad \tau_i = \sum_{j=1}^{2} g_{ij}(\theta)\left[a_0^j + h^j(\theta, \dot{\theta})\right], \quad i = 1,2. \qquad (4.1)$$

Здесь $\theta_d(t)$ - заданная траектория, a_0 - командное ускорение базового контура, U - линейный оператор формирования корректирующего воздействия. При выполнении условий точной компенсации закон (4.1) обеспечивает равенство $\ddot{\theta} = a_0$.

Ошибка слежения и её производная определяются в выбранных обобщённых координатах:

$$e = \theta_d - \theta, \qquad \dot{e} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}. \qquad (4.2)$$

Предполагается, что заданная траектория дважды непрерывно дифференцируема, а её значения и первые две производные известны и ограничены. Фактические координаты и скорости манипулятора доступны для формирования обратной связи. Разности углов вычисляются с использованием согласованных непрерывных представлений обобщённых координат.

В качестве регулятора внешнего контура используется PD-регулятор. При принятом определении ошибки оператор U и командное ускорение выражаются следующим образом:

$$Ue = -K_p e - K_d \dot{e}, \qquad a_0 = \ddot{\theta}_d + K_p e + K_d \dot{e}, \qquad a = a_0 + w, \qquad (4.3)$$

где K_p и K_d - диагональные матрицы с положительными диагональными элементами; a - командное ускорение с учётом коррекции; $w = (w_1, w_2)^T$ - дополнительное воздействие, предназначенное для уменьшения влияния неопределённости и внешних возмущений. При $w = 0$ сохраняется базовая структура траекторного управления.

Параметрическая неопределённость проявляется в несовпадении истинных параметров манипулятора с их значениями, используемыми при вычислении управляющих моментов. В рассматриваемом исследовании предполагаются известными длины звеньев, тогда как оценки их масс могут отличаться от истинных значений. Это приводит к расхождению между фактическими и расчётными компонентами метрического тензора и скоростных составляющих. Соответствующие расчётные величины обозначаются через $\hat{g}_{ij}$ и $\hat{h}^i$. Оценки физических параметров остаются постоянными в пределах отдельного вычислительного эксперимента.

При исследовании движения манипулятора в вертикальной плоскости дополнительно учитывается действие силы тяжести. Обозначим через $\tau_g(\theta)$ моменты, необходимые для её компенсации, а через $\tau_{\text{ext}}(t)$ - внешние возмущающие моменты. Тогда суммарный ковектор обобщённых сил определяется выражением $\tau - \tau_g + \tau_{\text{ext}}$. Учёт этих воздействий уточняет состав сил в геометрическом уравнении динамики, сохраняя его структуру. Внешние возмущения предполагаются ограниченными и кусочно-непрерывными; их текущие значения непосредственно в регулятор не передаются.

Для компактной записи далее используются матричные представления введённых геометрических величин: $g = \left[g_{ij}\right]$, $G = g^{-1} = \left[g^{ij}\right]$ и $h = (h^1, h^2)^T$. Матрицы g и $\hat{g}$ предполагаются симметричными и положительно определёнными в рассматриваемой области движения. С учётом расчётных параметров модели, дополнительного воздействия и компенсации силы тяжести управляющие моменты определяются законом

$$\tau = \hat{g}(\theta)\left[a + \hat{h}\left(\theta, \dot{\theta}\right)\right] + \hat{\tau}_g(\theta). \tag{4.4}$$

Здесь $\hat{\tau}_g$ вычисляется по параметрам модели регулятора. Матричная запись (4.4) представляет координатную форму закона вычисления моментов, полученного на основе геометрической динамики.

После подстановки (4.4) в уравнение движения с учётом силы тяжести и внешних возмущений фактическое ускорение принимает вид $\ddot{\theta} = La + \beta$, где

$$L = G\hat{g}, \qquad \beta = L\hat{h} - h + G\left(\hat{\tau}_g - \tau_g\right) + G\tau_{\text{ext}}. \tag{4.5}$$

Зависимости величин от координат, скоростей и времени в выражении (4.5) опущены для краткости. Матрица L характеризует влияние неточности метрического тензора на реализацию командного ускорения. Вектор β объединяет расхождения скоростных и гравитационных составляющих модели, а также влияние внешних моментов.

Суммарную ошибку реализации командного ускорения определим как

$$\eta = a - \ddot{\theta} = (I_2 - L)a - \beta. \tag{4.6}$$

Используя определения (4.2) и (4.3), получаем уравнение фактической динамики ошибки слежения:

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = \eta - w. \qquad (4.7)$$

При точной модели, точной компенсации силы тяжести и отсутствии внешних возмущений выполняются равенства $L = I_2$, $\beta = 0$ и $\eta = 0$. Для базового контура, соответствующего $w = 0$, уравнение (4.7) совпадает с однородным линейным уравнением ошибки, полученным в третьей главе. При наличии неопределённости и возмущений возникает остаточное воздействие $\eta - w$, определяющее отклонение фактической динамики от заданной.

Величина η зависит от командного ускорения. Поэтому при $L \neq I_2$ она зависит также от поправки w. Данное обстоятельство учитывается при формировании условий устойчивости: увеличение корректирующего воздействия само по себе не означает гарантированной компенсации неопределённости.

Задача адаптивного траекторного управления заключается в построении поправки w и закона изменения её коэффициентов ρ_i, обеспечивающих при сформулированных условиях ограниченность ошибок положения и скорости и коэффициентов настройки. Адаптация направлена на изменение интенсивности корректирующего воздействия и не предполагает идентификацию физических параметров манипулятора. При настройке используются поведение функции Ляпунова и текущие ошибки слежения относительно заданных допусков.

Качество управления оценивается по среднеквадратическим и максимальным ошибкам слежения, управляющим моментам и величине робастной поправки. Отдельно исследуется выполнение допусков на ошибки положения и скорости при изменении внешних воздействий. Эти допуски определяют условия работы механизма адаптации; гарантированное достижение соответствующей области точности требует самостоятельного обоснования.

В следующем подразделе формируется робастная поправка с постоянными коэффициентами. Затем разрабатывается закон их адаптивной настройки и устанавливаются достаточные условия ограниченности состояния ошибки полученной замкнутой системы.

4.2 Робастное траекторное управление на основе точной линеаризации

Объектом компьютерного эксперимента является двухзвенный Для уменьшения влияния параметрической неопределённости и внешних возмущений введём робастную поправку в командное ускорение. Её построение выполним на основе уравнения ошибки (4.7), полученного для системы управления с неточными параметрами модели. Направление корректирующего воздействия определим по его вкладу в производную функции Ляпунова.

Введём вектор состояния ошибки и матрицы её линейной динамики:

$$\xi = \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & I_2 \\ -K_p & -K_d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Тогда уравнение (4.7) принимает вид

$$\dot{\xi} = H\xi + B(\eta - w). \tag{4.9}$$

Здесь η характеризует суммарную ошибку реализации командного ускорения, обусловленную неточностью модели и внешними воздействиями, а w - вводимая робастная поправка. При $\eta = 0$ и $w = 0$ динамика ошибки определяется матрицей H.

Поскольку матрицы K_p и K_d диагональны и имеют положительные диагональные элементы, характеристический полином каждого канала имеет вид $s^2 + k_{d,i}s + k_{p,i}$, а его корни обладают отрицательными действительными частями. Следовательно, матрица H является гурвицевой. Для положительно определённой матрицы $P = I_4$ существует единственная симметричная положительно определённая матрица Q, удовлетворяющая уравнению Ляпунова [72]

$$H^T Q + QH = -P, \qquad P = I_4. \tag{4.10}$$

Выберем квадратичную функцию Ляпунова и введём вспомогательный сигнал:

$$V(\xi) = \xi^T Q \xi, \qquad z = B^T Q \xi. \tag{4.11}$$

Матрица Q определяется выбранной линейной динамикой ошибки и используется для оценки состояния ξ. Она не совпадает с матрицей метрического тензора $g(\theta)$, характеризующей кинетическую энергию манипулятора. Таким образом, применение квадратичной функции Ляпунова относится к анализу ошибки управления и сохраняет геометрическую основу модели объекта.

Дифференцируя функцию V вдоль решений системы (4.9) и учитывая уравнение (4.10), получаем

$$\dot{V} = \dot{\xi}^T Q \xi + \xi^T Q \dot{\xi} = \xi^T (H^T Q + QH)\xi + 2\xi^T QB(\eta - w) = \\ -\| \xi \|_2^2 + 2z^T \eta - 2z^T w. \tag{4.12}$$

Первое слагаемое характеризует убывание функции Ляпунова для идеальной линейной динамики. Слагаемое $2z^T\eta$, возникающее вследствие неточности компенсации и внешних возмущений, может иметь положительный знак. Для противодействия этому влиянию поправку необходимо выбирать так, чтобы её явный вклад $-2z^T w$ в производную функции Ляпунова был неположительным.

Указанное свойство обеспечивается при выполнении условия $z_i w_i \geq 0$ для каждого канала. Поэтому используем непрерывную робастную поправку с насыщением [73]:

$$w_i = \rho_i \mathrm{sat}\left(\frac{z_i}{\varepsilon_i}\right) = \rho_i \frac{z_i}{\max\{\varepsilon_i, |z_i|\}}, \qquad i = 1,2, \tag{4.13}$$

где $\rho_i > 0$ - постоянный коэффициент робастной коррекции, $\varepsilon_i > 0$ - параметр сглаживания. Функция насыщения определяется выражением

$$\mathrm{sat}(s) = \begin{cases} -1, & s < -1, \\ s, & |s| \leq 1, \\ 1, & s > 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

При $|z_i| < \varepsilon_i$ поправка линейно зависит от вспомогательного сигнала: $w_i = (\rho_i/\varepsilon_i) z_i$. При $|z_i| \geq \varepsilon_i$ она достигает предельной величины и имеет знак z_i. Следовательно, для всех значений сигнала выполняются неравенства $|w_i| \leq \rho_i$ и $z_i w_i \geq 0$.

Параметр ε_i задаёт ширину области линейного изменения поправки по сигналу z_i. Он не является непосредственно допустимой ошибкой положения, поскольку z_i зависит как от ошибки положения, так и от ошибки скорости. При фиксированном ρ_i уменьшение ε_i увеличивает коэффициент передачи поправки внутри этой области.

Условие $z_i w_i \geq 0$ определяет направление корректирующего воздействия, однако само по себе не гарантирует отрицательность всей производной (4.12). Достаточность величины поправки зависит от соотношения между коэффициентами ρ_i и суммарной неопределённостью η_i. Кроме того, согласно (4.6), при неточной матрице метрического тензора величина η зависит от командного ускорения и, следовательно, от самой поправки. Эта зависимость учитывается при анализе устойчивости в подразделе 4.4.

Для покомпонентной реализации алгоритма введём состояние ошибки отдельного звена:

$$\xi_i = \begin{pmatrix} e_i \\ \dot{e}_i \end{pmatrix}, \qquad H_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_{p,i} & -k_{d,i} \end{pmatrix}, \qquad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Соответствующая матрица Q_i и вспомогательный сигнал z_i определяются соотношениями

$$H_i^T Q_i + Q_i H_i = -I_2, \qquad z_i = b_0^T Q_i \xi_i. \tag{4.16}$$

При порядке переменных, принятом в (4.8), матрица Q_i образована строками и столбцами i и $i+2$ матрицы Q. Поскольку линейная часть системы состоит из двух независимых каналов, а в уравнении Ляпунова выбрано $P = I_4$, такое покомпонентное вычисление согласуется с выражением $z = B^T Q \xi$.

Динамическая связь звеньев при этом сохраняется в модели манипулятора и компонентах суммарной неопределённости η.

Робастный алгоритм образуется совместным использованием командного ускорения (4.3), закона вычисления моментов (4.4) и поправки (4.13). Сначала по ошибкам положения и скорости определяется базовое командное ускорение a_0. Затем вычисляется сигнал z, формируется поправка w и определяется скорректированное ускорение $a = a_0 + w$. Полученное значение поступает в блок вычисления управляющих моментов на основе расчётной геометрической модели.

При фиксированных значениях координат и скоростей отличие управляющего момента робастного алгоритма от базового определяется выражением

$$\Delta\tau = \hat{g}(\theta)w. \tag{4.17}$$

Следовательно, поправка w имеет смысл дополнительного командного ускорения, а её преобразование в моменты приводов осуществляется посредством матрицы $\hat{g}(\theta)$. Ограничение $|w_i| \le \rho_i$ не является непосредственным ограничением момента отдельного привода, поскольку каждый компонент $\Delta\tau$ зависит от элементов расчётной матрицы метрики и компонентов поправки.

В рассматриваемом робастном алгоритме коэффициенты ρ_i остаются постоянными на протяжении движения. Их выбор должен учитывать величину неопределённости модели и внешних воздействий. При изменяющихся условиях движения фиксированные значения могут оказаться недостаточными для требуемой коррекции либо превышать необходимый для текущего режима уровень. Поэтому далее рассматривается адаптивная настройка коэффициентов, позволяющая изменять интенсивность робастной поправки с учётом состояния системы.

4.3 Разработка адаптивно-робастного алгоритма траекторного управления

В работе [69] при неизвестных кинематических и динамических параметрах использован адаптивный контроллер с наблюдателем кинематики. В рассматриваемой системе оценки параметров модели фиксированы, а настраиваемой величиной служит коэффициент робастной коррекции каждого сочленения.

В рассмотренном робастном алгоритме коэффициенты ρ_i принимаются постоянными. Их значения определяют предельную величину поправки к командному ускорению и выбираются с учётом предполагаемой неопределённости модели и внешних воздействий. При изменении условий движения необходимая интенсивность коррекции также может изменяться. Для настройки этой интенсивности в процессе управления введём переменные коэффициенты $\rho_i(t)$.

Структура траекторного управления, представленная в подразделе 4.2, сохраняется. Поправка вычисляется по формуле (4.13), а командное ускорение и управляющие моменты по выражениям (4.3) и (4.4). Дополнительно вводится механизм изменения коэффициентов робастной коррекции по текущим ошибкам слежения и производным составляющих функции Ляпунова. Настройка осуществляется отдельно для каждого звена и не предполагает изменения оценок физических параметров манипулятора.

Для построения закона адаптации воспользуемся покомпонентным представлением состояния ошибки (4.15). При диагональных матрицах K_p, K_d и принятом выборе $P = I_4$ функция Ляпунова представляется в виде суммы

$$V = V_1 + V_2, \qquad V_i = \xi_i^T Q_i \xi_i, \qquad i = 1,2, \tag{4.18}$$

где положительно определённые матрицы Q_i удовлетворяют уравнениям (4.16). Такое разложение позволяет формировать условия настройки для каждого канала. При этом динамическая связь звеньев сохраняется в фактическом движении манипулятора и компонентах суммарной неопределённости.

Дифференцируя V_i вдоль решений системы ошибки, получаем фактическую производную и определим её идеальное значение:

$$\begin{gathered} \dot{V}_i = -\left(e_i^2 + \dot{e}_i^2\right) + 2z_i(\eta_i - w_i) \\ \dot{V}_{\mathrm{id},i} = -\left(e_i^2 + \dot{e}_i^2\right) \end{gathered} \tag{4.19}$$

Величина $\dot{V}_{\mathrm{id},i}$ представляет собой опорную производную для однородной линейной динамики ошибки. Она вычисляется в текущем состоянии фактической системы и используется для формирования условий адаптации.

С учётом определений $\eta = a - \ddot{\theta}$ и $a = a_0 + w$ выполняется равенство $\eta_i - w_i = a_{0,i} - \ddot{\theta}_i$. Поэтому фактическую производную можно вычислять без раздельного определения составляющих неопределённости:

$$\dot{V}_i = -\left(e_i^2 + \dot{e}_i^2\right) + 2z_i\left(a_{0,i} - \ddot{\theta}_i\right). \tag{4.20}$$

Для реализации выражения (4.20) требуется фактическое ускорение манипулятора. В имитационной модели оно определяется из уравнения движения объекта. При практической реализации необходимо обеспечить измерение или оценивание этого сигнала. Подстановка командного ускорения вместо фактического недопустима, поскольку исключает информацию о расхождении между требуемым и реализованным движением.

Условие убывания функции Ляпунова характеризует динамику состояния ошибки, однако не определяет непосредственно выполнение заданных допусков на положение и скорость. Поэтому в закон настройки дополнительно вводится безразмерная мера текущей ошибки:

$$s_i = \max\left\{\frac{|e_i|}{e_{\text{tol},i}}, \frac{|\dot{e}_i|}{\dot{e}_{\text{tol},i}}\right\}, \tag{4.21}$$

где $e_{\text{tol},i} > 0$ и $\dot{e}_{\text{tol},i} > 0$ - заданные пороги ошибок положения и скорости. Обозначение $\dot{e}_{\text{tol},i}$ здесь используется для допуска на ошибку скорости, а не для производной допуска на ошибку положения.

Условие $s_i \leq 1$ означает одновременное выполнение обоих допусков. При $s_i > 1$ превышен хотя бы один из них. Для разрешения уменьшения усиления задаётся более узкая область $s_i < s_{\text{low}}$, где $0 < s_{\text{low}} < 1$.

Предварительную скорость изменения коэффициента робастной коррекции определим следующим законом:

$$\nu_{\rho,i} = \begin{cases} k_{\rho,i}\min\{s_i - 1, 1\}, & s_i > 1, \quad \dot{V}_i > \frac{1}{2}\dot{V}_{\text{id},i}, \\ -k_{a,i}(1 - s_i/s_{\text{low}}), & s_i < s_{\text{low}}, \quad \dot{V}_i < \dot{V}_{\text{id},i}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4.22}$$

где $k_{\rho,i} > 0$ задаёт предельную скорость увеличения коэффициента, а $k_{a,i} > 0$ предельную по абсолютной величине скорость его уменьшения.

Увеличение коэффициента разрешается при одновременном превышении хотя бы одного допуска и выполнении условия $\dot{V}_i > 1/2\,\dot{V}_{\text{id},i}$. Поскольку $\dot{V}_{\text{id},i} \leq 0$, это означает нарушение выбранного условия убывания функции Ляпунова. Множитель $\min\{s_i - 1, 1\}$ ограничивает скорость роста значением $k_{\rho,i}$ и уменьшает её при приближении s_i к единице со стороны превышения допуска.

Уменьшение коэффициента разрешается при $s_i < s_{\text{low}}$ и $\dot{V}_i < \dot{V}_{\text{id},i}$, то есть при нахождении обеих ошибок внутри уменьшенной области допусков и выполнении более строгого условия убывания функции Ляпунова. При приближении s_i к s_{low} снизу скорость уменьшения коэффициента стремится к нулю.

В диапазоне $s_{\text{low}} \leq s_i \leq 1$ коэффициент сохраняется независимо от производной. Он также сохраняется при превышенном допуске, если условие роста по производной не выполнено, и при малых ошибках, если отсутствует условие разрешения уменьшения. Таким образом, изменение усиления определяется совместной оценкой текущей точности и динамики ошибки.
Для ограничения коэффициентов зададим допустимые интервалы $0 < \rho_{\min,i} < \rho_{\max,i}$.

Окончательный закон изменения коэффициента получим ограничением направления предварительной скорости на границах интервала:

$$\dot{\rho}_i = \begin{cases} 0, & \rho_i \leq \rho_{\min,i}, \quad \nu_{\rho,i} < 0, \\ 0, & \rho_i \geq \rho_{\max,i}, \quad \nu_{\rho,i} > 0, \\ \nu_{\rho,i}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.23}$$

Начальные значения выбираются из условия $\rho_{\min,i} \le \rho_i(0) \le \rho_{\max,i}$. На нижней границе блокируется дальнейшее уменьшение коэффициента, а на верхней его увеличение. Изменение, направленное внутрь допустимого интервала, сохраняется. Нижняя граница задаёт минимальный уровень робастного усиления, а верхняя ограничивает его максимально допустимое значение.

Параметры закона определяют различные свойства настройки. Допуски $e_{\mathrm{tol},i}$ и $\dot{e}_{\mathrm{tol},i}$ задают требования к текущей точности. Коэффициенты $k_{\rho,i}$ и $k_{a,i}$ определяют скорости изменения усиления. Порог s_{low} задаёт область, в которой может быть разрешено его уменьшение. Границы $\rho_{\min,i}$, $\rho_{\max,i}$ и начальные значения $\rho_i(0)$ определяют допустимый диапазон и исходное состояние настройки. Численные значения этих параметров приводятся при описании имитационной модели.

Работа адаптивно-робастного алгоритма осуществляется следующим образом. По текущим ошибкам положения и скорости вычисляются сигналы z_i и s_i. С использованием фактического ускорения определяются производные $\dot{V}_i$, которые сопоставляются с идеальными значениями $\dot{V}_{\mathrm{id},i}$. Закон (4.22) задаёт предварительные скорости изменения коэффициентов, а выражение (4.23) ограничивает их направление на границах допустимых интервалов. Полученные коэффициенты $\rho_i(t)$ используются при формировании робастной поправки по формуле (4.13).

Таким образом, закон адаптивной настройки определяет изменение коэффициентов робастной поправки по текущей точности слежения и производным составляющих функции Ляпунова. Ограничение направления изменения коэффициентов на границах допустимых интервалов обеспечивает их ограниченность в непрерывной реализации при допустимых начальных значениях. Условия ограниченности ошибки слежения исследуются в следующем подразделе. Заданные допуски используются в логике адаптации; их выполнение требует отдельного обоснования.

4.4 Анализ устойчивости адаптивной системы управления

Рассмотрим замкнутую систему траекторного управления с робастной поправкой (4.13) и законом адаптивной настройки (4.21)–(4.23). Анализ направлен на установление ограниченности коэффициентов настройки, определение условий убывания функции Ляпунова и получение оценки ошибки слежения при параметрической неопределённости и внешних возмущениях.

Динамика вектора ошибки $\xi = (e^T, \dot{e}^T)^T$ описывается уравнением (4.9). При выбранных диагональных матрицах K_p и K_d с положительными диагональными элементами матрица H является гурвицевой. Поэтому решение Q уравнения Ляпунова (4.10) симметрично и положительно определено.

Для анализа используем квадратичную функцию Ляпунова $V(\xi)$, заданную формулой (4.11). Согласно (4.18), она представляет собой сумму $V_1 + V_2$ где каждое слагаемое учитывает ошибки положения и скорости соответствующего

сочленения. Положительная определенность матрицы Q позволяет оценить $V(\xi)$ через квадрат нормы вектора ошибки:

$$\lambda_{\min}(Q) \parallel \xi \parallel_2^2 \leq V(\xi) \leq \lambda_{\max}(Q) \parallel \xi \parallel_2^2. \quad (4.24)$$

где $\lambda_{\min}(Q)$ и $\lambda_{\max}(Q)$ – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы Q.

Следовательно, функция V позволяет оценивать величину состояния ошибки. Производная каждой составляющей вдоль движения замкнутой системы равна

$$\dot{V}_i = -\parallel \xi_i \parallel_2^2 + 2z_i(\eta_i - w_i), \qquad \dot{V}_{\mathrm{id},i} = -\parallel \xi_i \parallel_2^2. \quad (4.25)$$

Поскольку функция V непосредственно не зависит от коэффициентов ρ_i, выражение её производной сохраняется при их адаптивном изменении. Настройка влияет на динамику ошибки через формируемое корректирующее воздействие.

Закон настройки предусматривает ограниченные скорости увеличения и уменьшения коэффициентов. Из выражения (4.22) следует

$$-k_{a,i} \leq \nu_{\rho,i} \leq k_{\rho,i}.$$

Проекция (4.23) блокирует изменение, направленное за пределы допустимого интервала. На нижней границе производная коэффициента неотрицательна, а на верхней - неположительна. Поэтому при начальных условиях $\rho_i(0) \in [\rho_{\min,i}, \rho_{\max,i}]$ для непрерывной реализации выполняются

$$\rho_{\min,i} \leq \rho_i(t) \leq \rho_{\max,i}, \qquad -k_{a,i} \leq \dot{\rho}_i(t) \leq k_{\rho,i}. \quad (4.26)$$

Таким образом, механизм настройки сохраняет коэффициенты в заданных пределах и ограничивает скорость их изменения. С учётом свойств функции насыщения одновременно обеспечивается ограниченность робастной поправки:

$$|w_i(t)| \leq \rho_i(t) \leq \rho_{\max,i}. \quad (4.27)$$

Нижняя граница поддерживает минимальный уровень робастного усиления, а верхняя задаёт допустимую интенсивность корректирующего воздействия.

Особенностью рассматриваемого алгоритма является совместное использование текущей точности слежения и производной функции Ляпунова. Введём обозначения

$$r_i = \parallel \xi_i \parallel_2^2, \qquad \chi_i = \dot{V}_i - \frac{1}{2}\dot{V}_{\mathrm{id},i} = \dot{V}_i + \frac{1}{2}r_i. \quad (4.28)$$

При превышении допуска, то есть при $s_i > 1$, возможны два режима. Если $\chi_i \le 0$, коэффициент сохраняется, а соответствующая составляющая функции Ляпунова удовлетворяет оценке

$$\dot{V}_i \le -\frac{1}{2} r_i. \tag{4.29}$$

Следовательно, сохранение усиления в этом режиме обосновано выполнением заданного условия убывания функции Ляпунова.

Если $s_i > 1$ и $\chi_i > 0$, алгоритм активирует увеличение коэффициента при наличии резерва до его верхней границы:

$$\dot{\rho}_i = k_{\rho,i} \min\{s_i - 1{,}1\} > 0, \qquad \rho_i < \rho_{\max,i}. \tag{4.30}$$

Данный режим предназначен для усиления корректирующего воздействия при одновременном превышении допуска и нарушении выбранного условия убывания. Скорость настройки ограничена, а при приближении s_i к единице со стороны превышения допуска уменьшается.

Уменьшение усиления допускается при $s_i < s_{\text{low}}$ и выполнении более строгого условия

$$\dot{V}_i < \dot{V}_{\text{id},i} = -r_i. \tag{4.31}$$

Таким образом, снижение коэффициента разрешается в состояниях, для которых обе ошибки находятся внутри уменьшенной области допусков и наблюдается достаточное убывание функции Ляпунова. В промежуточной области $s_{\text{low}} \le s_i \le 1$ коэффициент сохраняется.

Такая организация настройки связывает увеличение усиления с необходимостью дополнительной коррекции, а его уменьшение – с достигнутой точностью и текущим убыванием функции Ляпунова. Указанные свойства характеризуют режимы работы алгоритма; оценка ошибки замкнутой системы устанавливается далее при условии достаточности формируемой поправки.

Сформулируем достаточное условие предельной ограниченности состояния ошибки.

Утверждение. Пусть решение замкнутой системы существует при всех $t \ge t_0$, коэффициенты настройки удовлетворяют ограничениям (4.26), а начиная с момента t_0 выполняются неравенства

$$|\eta_i(t)| \le \rho_i(t), \qquad i = 1{,}2. \tag{4.32}$$

Тогда состояние ошибки слежения предельно ограничено и удовлетворяет временной оценке, приведённой ниже.

Доказательство. Вне области линейного изменения поправки, при $|z_i| \ge \varepsilon_i$, имеем $w_i = \rho_i \operatorname{sgn}(z_i)$. Используя условие (4.32), получаем

$$2z_i(\eta_i - w_i) \le 2|z_i|(|\eta_i| - \rho_i) \le 0. \qquad (4.33)$$

Следовательно, в этой области вклад неопределённости и робастной поправки в производную функции Ляпунова является неположительным.

При $|z_i| < \varepsilon_i$ поправка имеет вид $w_i = \rho_i z_i/\varepsilon_i$. Поэтому

$$2z_i(\eta_i - w_i) \le 2\rho_i|z_i| - \frac{2\rho_i}{\varepsilon_i}|z_i|^2 = -\frac{2\rho_i}{\varepsilon_i}\left(|z_i| - \frac{\varepsilon_i}{2}\right)^2 + \frac{\rho_i\varepsilon_i}{2} \le \frac{\rho_i\varepsilon_i}{2} \qquad (4.34)$$

Суммируя оценки по каналам и учитывая верхние границы коэффициентов, получаем

$$\dot{V} \le -\| \xi \|_2^2 + c, \qquad c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \rho_{\max,i}\, \varepsilon_i. \qquad (4.35)$$

На основании (4.24) это неравенство можно представить в форме

$$\dot{V} \le -\alpha V + c, \qquad \alpha = \frac{1}{\lambda_{\max}(Q)} > 0. \qquad (4.36)$$

Умножая обе части неравенства (4.36) на интегрирующий множитель $exp(\alpha t)$ и интегрируя от начального момента до момента t, получаем оценку

$$V(t) \le e^{-\alpha(t-t_0)}V(t_0) + \frac{c}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right). \qquad (4.37)$$

Следовательно,

$$\| \xi(t) \|_2^2 \le \frac{e^{-\alpha(t-t_0)}V(t_0)}{\lambda_{\min}(Q)} + \frac{c\left(1-e^{-\alpha(t-t_0)}\right)}{\alpha\lambda_{\min}(Q)}. \qquad (4.38)$$

Первое слагаемое характеризует затухание влияния состояния ошибки в момент t_0, второе определяет гарантированную оценку остаточной ошибки при принятых предпосылках. При $t \to \infty$ получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \| \xi(t) \|_2 \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{2\lambda_{\min}(Q)}\sum_{i=1}^{2} \rho_{\max,i}\, \varepsilon_i}. \qquad (4.39)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.32) состояние ошибки предельно ограничено. Утверждение доказано.

Полученная оценка устанавливает связь между гарантированной границей ошибки, параметрами сглаживания и допустимыми коэффициентами робастной коррекции. При фиксированных $\rho_{\max,i}$ уменьшение ε_i уменьшает правую часть (4.39). Оценка относится к принятому масштабу переменных состояния и служит теоретической границей, с которой могут сопоставляться результаты численного исследования.

Условие (4.32) характеризует достаточность текущего усиления относительно суммарной ошибки реализации командного ускорения. При его обосновании учитывается зависимость

$$\eta = (I_2 - L)(a_0 + w) - \beta. \tag{4.40}$$

Поэтому достаточность усилений рассматривается для замкнутой системы с учётом влияния поправки на фактическое движение. Закон адаптации задаёт механизм их изменения, а условие (4.32) определяет область применимости доказанной оценки. Достижение этого условия самим механизмом настройки требует отдельного обоснования; оно не предполагается следствием одной лишь проекции коэффициентов.

Рассмотрим условия сходимости ошибки слежения к нулю. При точном соответствии модели объекту, точной компенсации силы тяжести и отсутствии внешних возмущений выполняется $\eta = 0$. Из свойства $z_i w_i \geq 0$ следует

$$\dot{V} = -\| \xi \|_2^2 - 2\sum_{i=1}^{2} z_i w_i \leq -\alpha V. \tag{4.41}$$

Следовательно,

$$\| \xi(t) \|_2 \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}}\, e^{-\alpha(t-t_0)/2} \| \xi(t_0) \|_2. \tag{4.42}$$

Таким образом, в условиях точной компенсации адаптивно-робастная система сохраняет экспоненциальное затухание ошибки слежения при любых допустимых изменениях коэффициентов настройки. Робастная поправка вносит неположительный вклад в производную функции Ляпунова и согласуется с устойчивой динамикой базового контура.

Проведённый анализ устанавливает ограниченность коэффициентов адаптации и корректирующего воздействия, а также согласованность режимов настройки с условиями убывания функции Ляпунова. Для системы с неопределённостью получены временная и предельная оценки ошибки при достаточности текущих усилений. В идеальных условиях доказано экспоненциальное затухание ошибки. Эти результаты формируют теоретическую основу последующего численного исследования точности слежения и интенсивности управляющих воздействий.

4.5 Разработка имитационной модели двухзвенного манипулятора в MATLAB/Simulink

Для исследования разработанных алгоритмов траекторного управления в среде MATLAB/Simulink построены имитационные модели двухзвенного планарного манипулятора. Моделирование направлено на оценку точности слежения в условиях параметрической неопределённости и внешних

возмущений, а также на исследование влияния робастной поправки и адаптивной настройки её коэффициентов на управляющие воздействия.

Для сравнительного исследования реализованы три варианта системы: базовое управление на основе точной линеаризации, робастное управление с постоянными коэффициентами коррекции и адаптивно-робастное управление. Во всех вариантах используются одинаковая структура объекта, генератор заданной траектории и базовый контур обратной связи. Различия определяются способом формирования робастной поправки и наличием подсистемы настройки её коэффициентов.

Модель объекта основана на геометрическом уравнении динамики, полученном во второй главе. В среде Simulink это уравнение реализуется посредством вычисления его координатных составляющих. Обозначения сигналов q, dq и ddq, используемые в блоках модели, соответствуют обобщённым координатам θ, скоростям $\dot{\theta}$ и ускорениям $\ddot{\theta}$, принятым в теоретическом описании.

Опишем реализацию базового контура траекторного управления. Общими элементами рассматриваемых моделей являются генератор заданной траектории Trajectory, подсистема пропорционально-дифференциальной коррекции PD, блок вычисления управляющих моментов СТС, модель манипулятора Plant и генератор внешних возмущений Disturbance.

Блок Trajectory получает текущее время и параметры заданного движения: амплитуды A_1, A_2 и угловые частоты ω_1, ω_2. На его выходах формируются заданные положения, скорости и ускорения:

$$\theta_{d,i}(t) = A_i \sin(\omega_i t), \qquad i = 1,2, \tag{4.43}$$

$$\dot{\theta}_{d,i}(t) = A_i \omega_i \cos(\omega_i t), \qquad \ddot{\theta}_{d,i}(t) = -A_i \omega_i^2 \sin(\omega_i t). \tag{4.44}$$

Аналитическое вычисление производных обеспечивает согласованность задающих сигналов и исключает необходимость численного дифференцирования заданной траектории.

На вход подсистемы PD поступают заданные и фактические положения и скорости. По этим сигналам определяются ошибки

$$e = \theta_d - \theta, \qquad \dot{e} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}. \tag{4.45}$$

Выход подсистемы представляет собой корректирующее ускорение $K_p e + K_d \dot{e}$. Его суммирование с заданным ускорением формирует базовое командное воздействие:

$$a_0 = \ddot{\theta}_d + K_p e + K_d \dot{e}. \tag{4.46}$$

В базовой системе робастная поправка отсутствует, поэтому $a = a_0$. Блок СТС преобразует командное ускорение в управляющий момент в соответствии с законом, полученным в результате точной линеаризации:

$$\tau = \hat{g}(\theta)\left[a + \hat{h}\left(\theta, \dot{\theta}\right)\right] + \hat{\tau}_g(\theta). \tag{4.47}$$

Здесь используются оценки составляющих геометрической модели, определённые в подразделе 4.1. Таким образом, блок СТС реализует ранее полученный закон управления; повторный синтез линеаризующей обратной связи при построении имитационной модели не требуется.

Управляющий момент суммируется с внешним возмущением и поступает в подсистему Plant. В ней по текущему состоянию и приложенным моментам вычисляется фактическое ускорение. Интегрирование ускорения и скорости формирует значения $\dot{\theta}$ и θ, которые возвращаются в контур обратной связи. Имитационные модели рассматриваемых систем управления и структура их основных подсистем представлены на рисунках 4.1–4.5.

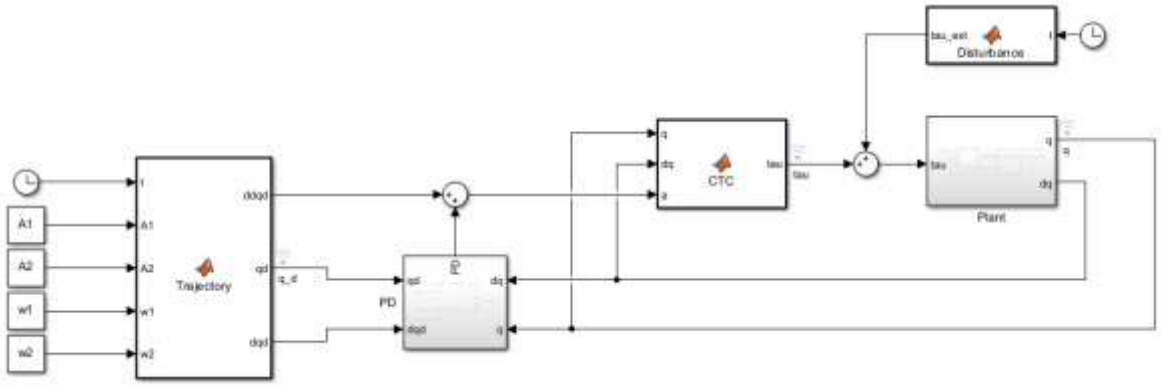

Рисунок 4.1 - Имитационная модель базовой системы траекторного управления двухзвенным манипулятором

Робастная модель сохраняет структуру базового контура. Её отличие состоит во введении подсистемы RobustTerm, выход которой подключается к сумматору командного ускорения:

$$a = a_0 + w. \tag{4.48}$$

Следовательно, поправка w вводится на уровне ускорений до преобразования командного воздействия в управляющие моменты. Она не является дополнительным моментом, непосредственно приложенным к суставам. Соответствующее изменение управляющего момента определяется преобразованием, выполняемым в блоке СТС.

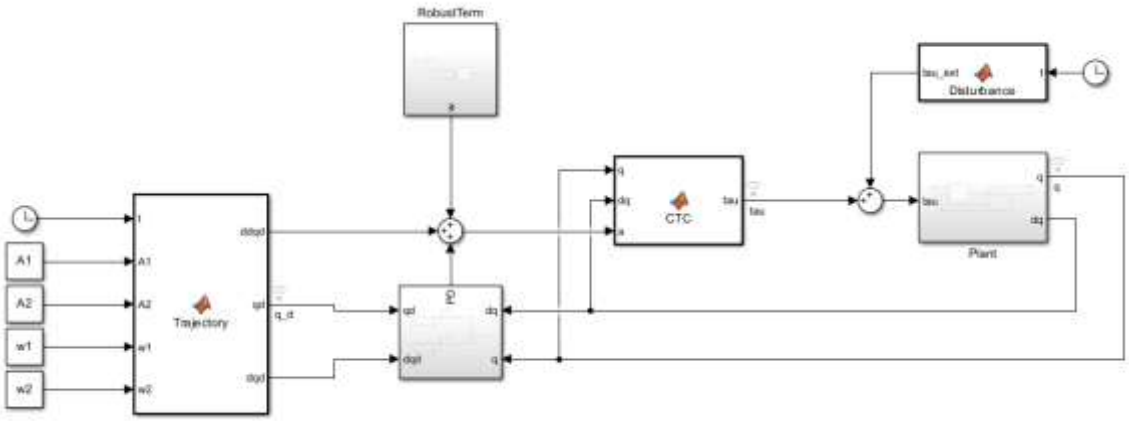

Рисунок 4.2 - Имитационная модель робастной системы траекторного управления двухзвенным манипулятором

Внутри подсистемы RobustTerm по ошибкам положения и скорости формируется вспомогательный сигнал z. Для каждого канала он определяется выражением

$$z_i = b_0^T Q_i \xi_i, \qquad \xi_i = \begin{pmatrix} e_i \\ \dot{e}_i \end{pmatrix}, \qquad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

Если строка $b_0^T Q_i$ представлена коэффициентами $c_{z1,i}$ и $c_{z2,i}$, вычисление принимает вид

$$z_i = c_{z1,i} e_i + c_{z2,i} \dot{e}_i. \tag{4.50}$$

На представленной схеме эти операции реализованы блоками усиления Cz(1), Cz(2) и сумматором. Использование общих коэффициентов для обоих каналов соответствует случаю одинаковых матриц Q_i. При различных настройках каналов коэффициенты линейной комбинации задаются покомпонентно.

Блок MATLAB Function robust_law получает сигналы z, ρ и параметры сглаживания eps_w. На его выходе вычисляется робастная поправка

$$w_i = \rho_i \mathrm{sat}\left(\frac{z_i}{\varepsilon_i}\right), \qquad i = 1,2. \tag{4.51}$$

В робастном варианте коэффициенты ρ_i остаются постоянными в течение прогона. Выход w поступает в сумматор командного ускорения. Дополнительный выход z используется при подключении адаптивной подсистемы.

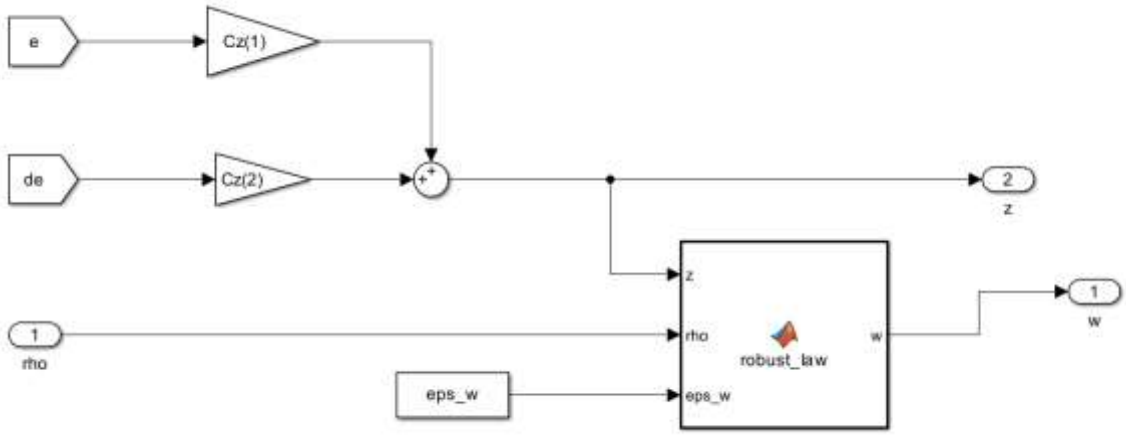

Рисунок 4.3 - Внутренняя структура подсистемы формирования робастной поправки

В адаптивно-робастной модели коэффициенты поправки изменяются в процессе движения. Для их вычисления вводится подсистема AdaptationP, связанная с подсистемой RobustTerm. На её выходе формируется вектор ρ, определяющий текущую интенсивность робастной коррекции.

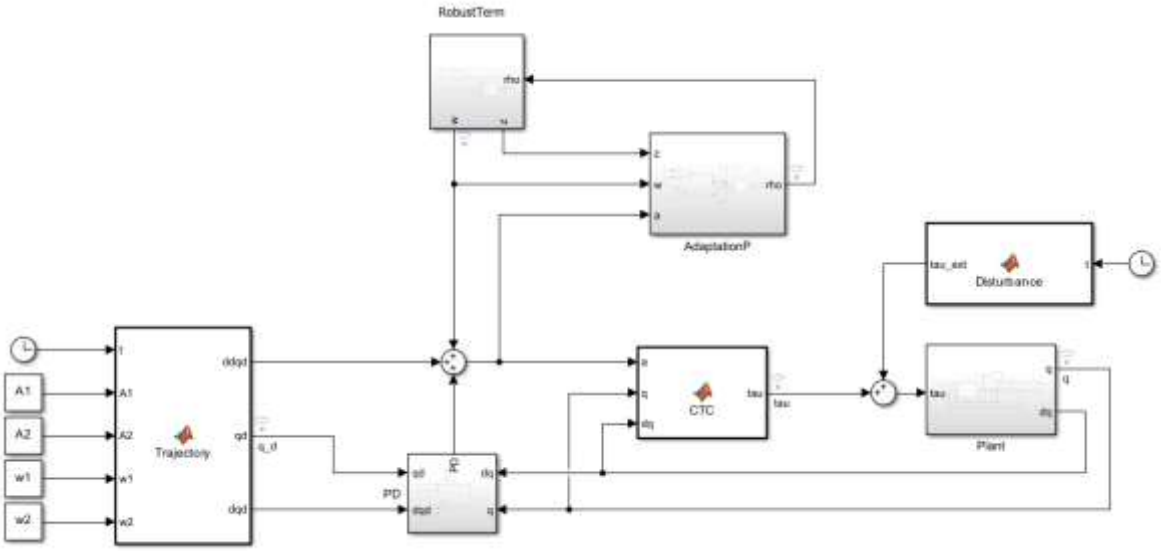

Рисунок 4.4 - Имитационная модель адаптивно-робастной системы траекторного управления двухзвенным манипулятором

Вычисление производных функции Ляпунова организовано в двух ветвях. Верхняя ветвь по ошибкам положения и скорости формирует опорные значения

$$\dot{V}_{\mathrm{id},i} = -\left(e_i^2 + \dot{e}_i^2\right). \qquad (4.52)$$

Операции возведения в квадрат и суммирования выполняются покомпонентно. На выходе формируется двухкомпонентный сигнал, содержащий значения для первого и второго суставов.

Нижняя ветвь использует командное ускорение a, фактическое ускорение $\ddot{\theta}$, робастную поправку w и вспомогательный сигнал z. Последовательно вычисляются разность $a - \ddot{\theta} - w$, её покомпонентное произведение с z и умножение результата на два. После суммирования с опорной производной получаются фактические производные:

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{\mathrm{id},i} + 2z_i\left(a_i - \ddot{\theta}_i - w_i\right). \tag{4.53}$$

Поскольку $a = a_0 + w$, формула (4.53) эквивалентна выражению (4.25). Фактическое ускорение должно поступать из подсистемы динамики объекта. Его замена командным ускорением исключила бы информацию о неточности реализации управляющего воздействия.

Для реализации закона подраздела 4.3 в блок настройки дополнительно передаются ошибки e, $\dot{e}$ и текущие значения ρ. По ошибкам вычисляется нормированная мера

$$s_i = \max\left\{\frac{|e_i|}{e_{\mathrm{tol},i}}, \frac{|\dot{e}_i|}{\dot{e}_{\mathrm{tol},i}}\right\}. \tag{4.54}$$

Блок rho_law определяет скорости изменения коэффициентов в соответствии с условиями (4.22) и ограничением направления изменения (4.23). Полученные сигналы поступают на интеграторы:

$$\rho_i(t) = \rho_i(0) + \int_0^t \dot{\rho}_i\,(\sigma)\,d\sigma. \tag{4.55}$$

Выходы интеграторов передаются в RobustTerm и возвращаются на вход блока настройки для проверки достижения допустимых границ. Пределы выхода интеграторов задаются согласованно с $\rho_{\min,i}$ и $\rho_{\max,i}$, чтобы поддерживать ограничения коэффициентов при численной реализации.

Таким образом, адаптивная подсистема использует производные составляющих функции Ляпунова и достигнутую точность слежения. Вычисления выполняются отдельно для каждого сустава, при этом динамическая связь звеньев сохраняется в модели объекта.

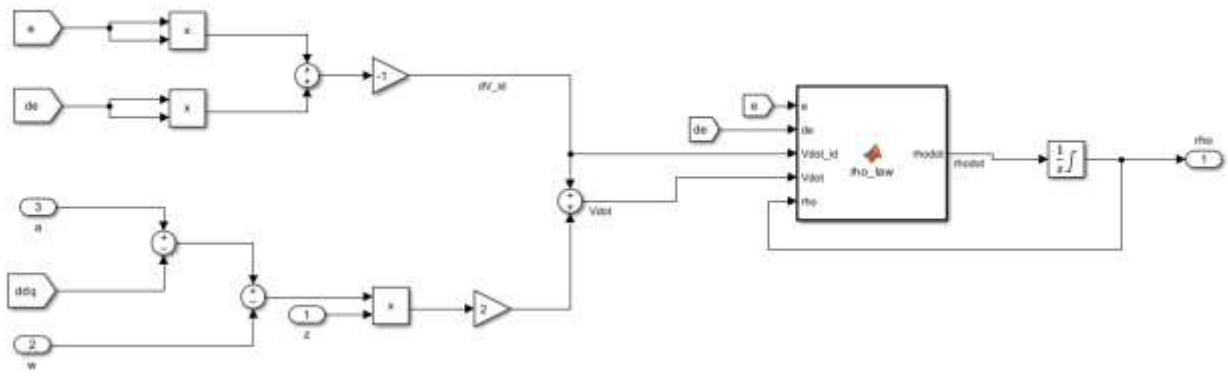

Рисунок 4.5 - Подсистема адаптивной настройки коэффициентов робастной коррекции с учётом точности слежения

Параметрическая неопределённость задаётся различием параметров, используемых в подсистемах Plant и СТС. В первом случае определяются действительные характеристики объекта, во втором оценки, на основании которых вычисляется управляющий момент. Такой способ позволяет исследовать влияние ошибок модели при неизменной структуре регулятора.

Внешнее воздействие формируется блоком Disturbance, на вход которого поступает текущее время. Его выход представляет собой двухкомпонентный вектор возмущающих моментов, добавляемый к управляющему воздействию перед входом Plant. Изменение функции возмущения позволяет воспроизводить отсутствие внешнего воздействия, гармоническое возмущение постоянной амплитуды и последовательное включение, усиление и снятие воздействия.

Раздельное введение параметрической неопределённости и внешних моментов позволяет оценивать влияние каждого фактора и их совместное действие. Значения параметров, начальные условия и временные интервалы воздействия устанавливаются для каждого сценария вычислительного эксперимента.

4.6 Исследование точности и устойчивости траекторного управления при изменении параметров манипулятора и воздействии внешних возмущений

Компьютерное моделирование направлено на исследование качества траекторного управления двухзвенным планарным манипулятором при начальном рассогласовании, неточных оценках масс и внешних возмущающих моментах. Сопоставляются три реализации системы управления: базовый алгоритм вычисляемых моментов СТС, робастный СТС с постоянными коэффициентами коррекции и адаптивно-робастный СТС.

Сравнение выполняется при одинаковых заданных траекториях и коэффициентах базового регулятора. Анализируются ошибки слежения, управляющие моменты, робастные поправки и изменение коэффициентов адаптивной настройки. Теоретические условия ограниченности состояния ошибки установлены в подразделе 4.4.

В качестве объекта исследования рассматривается двухзвенный планарный робот-манипулятор с двумя вращательными сочленениями. Расчётная модель включает два невесомых жёстких звена длиной $l_1 = l_2 = 1$ м с сосредоточенными на их концах массами $m_1 = m_2 = 1$ кг. Конфигурация манипулятора задаётся обобщёнными координатами θ_1 и θ_2, измеряемыми в радианах, а управляющими воздействиями являются моменты τ_1 и τ_2. Движение описывается геометрическим уравнением динамики, полученным в предыдущих разделах и учитывающим динамическую взаимосвязь суставов и действие силы тяжести при ускорении свободного падения $g_0 = 9{,}81$ м/с^2.

Зададим общую для сравниваемых алгоритмов траекторию. Для первого сочленения выберем амплитуду $A_1 = 0{,}5$ рад и угловую частоту $\omega_1 = 1$ рад/с, для второго $A_2 = 1$ рад и $\omega_2 = 2$ рад/с. Подставляя эти значения в формулу (4.43), получаем заданные углы поворота сочленений

$$\theta_{d,1}(t) = 0{,}5\sin t, \qquad \theta_{d,2}(t) = \sin(2t).$$

По формулам (4.44) находим соответствующие угловые скорости и ускорения

$$\dot{\theta}_{d,1}(t) = 0{,}5\cos t, \qquad \dot{\theta}_{d,2}(t) = 2\cos(2t),$$
$$\ddot{\theta}_{d,1}(t) = -0{,}5\sin t, \qquad \ddot{\theta}_{d,2}(t) = -4\sin(2t).$$

Применение аналитических выражений для производных позволяет формировать входные сигналы регулятора без численного дифференцирования заданных координат. Для обеспечения единых условий исследования во всех реализациях сохраняются одинаковые матрицы коэффициентов пропорциональной и дифференциальной обратной связи $K_p = \mathrm{diag}(36{,}36)$, $K_d = \mathrm{diag}(12{,}12)$.

В робастном алгоритме коэффициенты коррекции принимаются постоянными и равными $\rho_1 = \rho_2 = 2$. В адаптивно-робастном алгоритме эти значения используются в качестве начальных условий $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 2$, а последующее изменение коэффициентов определяется законом адаптивной настройки. Параметры сглаживания робастной поправки для обоих суставов задаются одинаковыми $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}$.

Для последовательной оценки влияния начальных условий, неточности модели и внешней нагрузки сформированы четыре сценария. Их основные параметры представлены в таблице 4.1. Во всех сценариях сохраняются заданные траектории и коэффициенты базового регулятора.

Таблица 4.1 - Сценарии вычислительного эксперимента

Сценарий	Оценки масс	Начальные углы	Начальные скорости	Внешние моменты	Время
Точная модель	[1; 1]	[0,2; -0,2]	[0; 0]	[0; 0]	20
Неточные массы	[0,85; 0,85]	[0; 0]	[0,5; 2]	[0; 0]	20
Неточные массы и возмущение	[0,85; 0,85]	[0; 0]	[0,5; 2]	[sin(2t); 0,5sin(3t)]	20
Измененяющееся возмущение	[0,85; 0,85]	[0; 0]	[0,5; 2]	A(t)[sin(2t); 0,5sin(3t)]	120

В четвёртом сценарии амплитуда внешних возмущающих моментов изменяется по кусочно-постоянному закону:

$$A(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 30, \\ 1, & 30 \le t \le 60, \\ 2, & 60 \le t \le 90, \\ 0, & 90 \le t \le 120, \end{cases}, \tag{4.56}$$

где t - время.

В первом сценарии исследуется устранение начального рассогласования при точном соответствии модели объекту. Во втором вводится неточность оценок масс без внешнего воздействия. Третий сценарий характеризует совместное действие параметрической неопределённости и гармонических внешних моментов. В четвёртом сценарии рассматривается последовательное включение, усиление и снятие возмущения в пределах одного непрерывного прогона.

Оценка результатов каждого сценария выполняется по показателям точности слежения, управляющих моментов и интенсивности робастной коррекции. Далее определены используемые показатели и временные интервалы их расчёта.

Для количественной оценки результатов моделирования используются показатели точности слежения, управляющих моментов и интенсивности робастной коррекции. Расчёты выполняются отдельно для каждого сустава на выбранном временном интервале $[t_a, t_b]$, где t_a и t_b – начало и конец расчётного окна.

Ошибку положения $e_i(t)$ каждого сочленения вычисляли по формуле (4.2). Для оценки точности слежения на интервале времени $[t_a, t_b]$ определяли среднеквадратическое значение этой ошибки по формуле

$$e_{\mathrm{RMS},i} = \sqrt{\frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} e_i^2\,(t)\,dt}. \tag{4.57}$$

Этот показатель характеризует общий уровень отклонений на выбранном интервале с повышенным вкладом больших ошибок. Для оценки наибольшего отклонения используется максимальная абсолютная ошибка:

$$e_{\max,i} = \max_{t\in[t_a,t_b]} |e_i(t)|. \tag{4.58}$$

Управляющие воздействия оцениваются по пиковому и среднеквадратическому значениям моментов:

$$\tau_{\text{peak},i} = \max_{t\in[t_a,t_b]} |\tau_i(t)|$$
$$\tau_{\text{RMS},i} = \sqrt{\frac{1}{t_b - t_a}\int_{t_a}^{t_b} \tau_i^2\,(t)\,dt} \tag{4.59}$$

Здесь $\tau_i(t)$ – момент, формируемый регулятором до добавления внешнего возмущающего воздействия. Пиковое значение характеризует наибольший по модулю управляющий момент, а среднеквадратическое его интенсивность на рассматриваемом интервале. Оба показателя измеряются в Н·м.

Интенсивность робастной коррекции характеризуется среднеквадратическим значением поправки к командному ускорению:

$$w_{\text{RMS},i} = \sqrt{\frac{1}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b} w_i^2\,(t)\,dt}. \tag{4.60}$$

Показатель $w_{\text{RMS},i}$ измеряется в рад/с² и позволяет оценить величину дополнительного корректирующего воздействия. В базовом алгоритме СТС робастная поправка отсутствует, поэтому $w_i(t) = 0$ и $w_{\text{RMS},i} = 0$. Для робастной и адаптивно-робастной реализаций этот показатель рассматривается совместно с ошибками слежения и управляющими моментами.

В сценариях 1-3 графики охватывают интервал 0-20 с, а показатели ошибок рассчитываются на участке 5-20 с. Поэтому приведённые максимальные ошибки не включают начальные отклонения. Указанное окно оценки ошибок не распространяется автоматически на показатели моментов и поправок.

В сценарии 4 отдельно рассматриваются полный интервал 0-120 с, четыре тридцатисекундных этапа и заключительные десятисекундные участки каждого этапа. Показатели полного этапа учитывают переходную реакцию на переключение и последующее движение; показатели заключительного участка характеризуют точность к концу этапа. Выделение этих участков само по себе не означает завершения адаптации или установления стационарного режима.

В первом сценарии параметры объекта и модели регулятора совпадают, внешние моменты отсутствуют. Начальные углы равны 0,2 и -0,2 рад, начальные скорости равны нулю. Эти условия отличаются от начального состояния заданного движения и позволяют исследовать устранение начальной ошибки.

Траектории движения и ошибки слежения для сценария 1 представлены на рисунках 4.6-4.7.

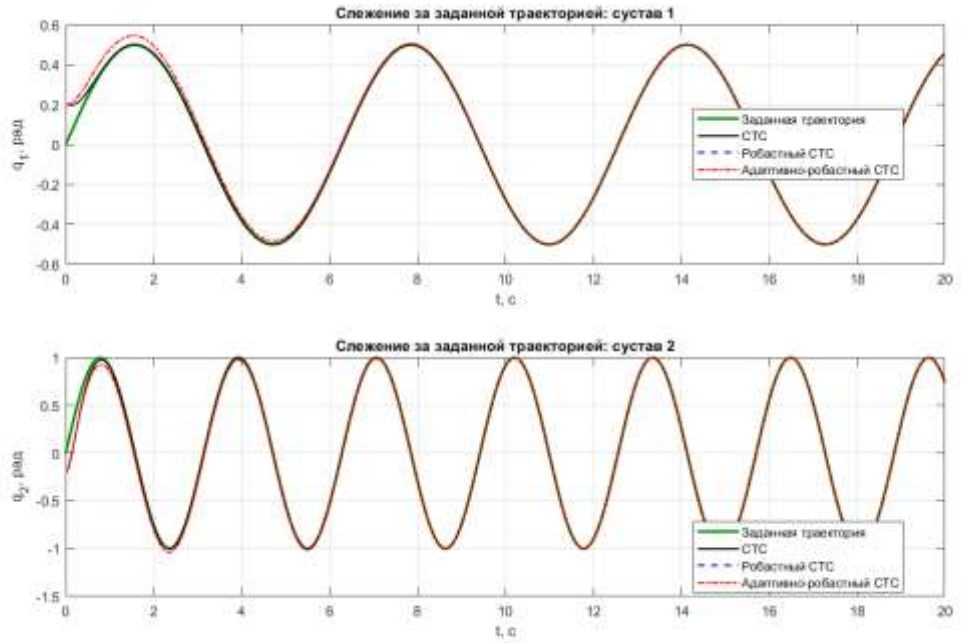

Рисунок 4.6 - Слежение за заданными траекториями. Сценарий 1

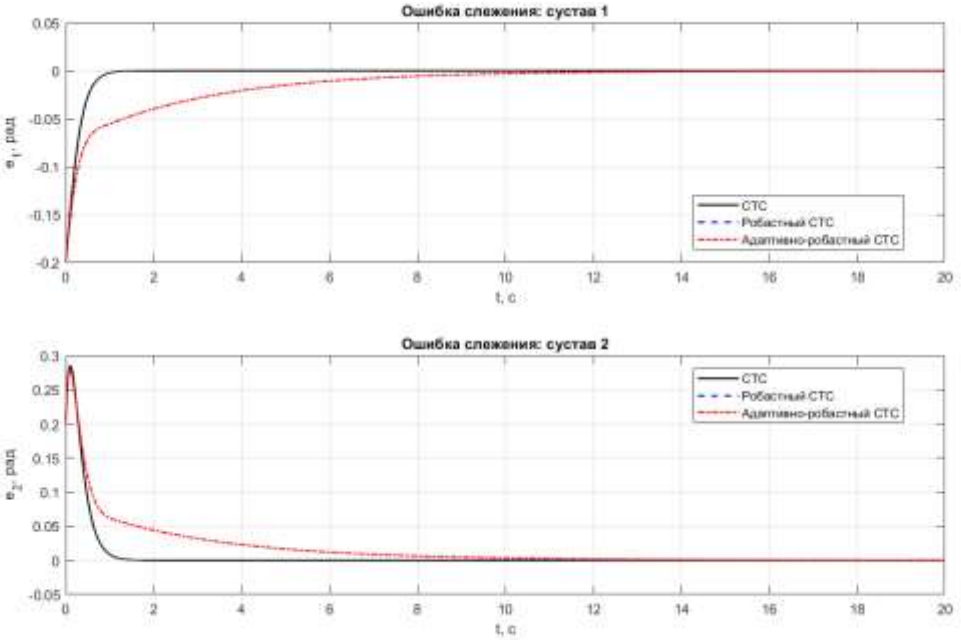

Рисунок 4.7 - Ошибки слежения. Сценарий 1

После начального переходного процесса фактические координаты приближаются к заданным. При этом количественное сравнение показывает различие между базовым контуром и реализациями с робастной коррекцией, которое трудно оценить только по графикам самих траекторий. Показатели ошибок в таблице 4.2 рассчитаны на интервале 5-20 с и не включают начальные отклонения.

Изменение управляющих моментов обоих суставов показано на рисунке 4.8.

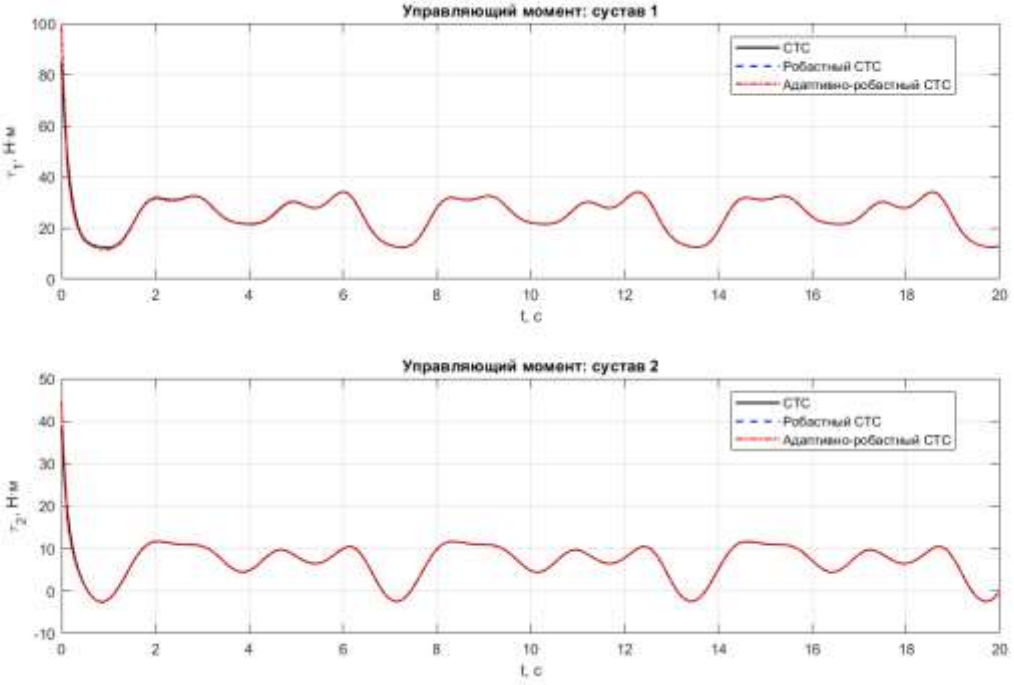

Рисунок 4.8 - Управляющие моменты. Сценарий 1

Начальный участок изменения управляющих моментов соответствует устранению рассогласования между фактическим и заданным состояниями манипулятора. Последующее воздействие обеспечивает воспроизведение заданного движения.

Характер настройки коэффициентов и формируемые робастные поправки представлены на рисунках 4.9 и 4.10.

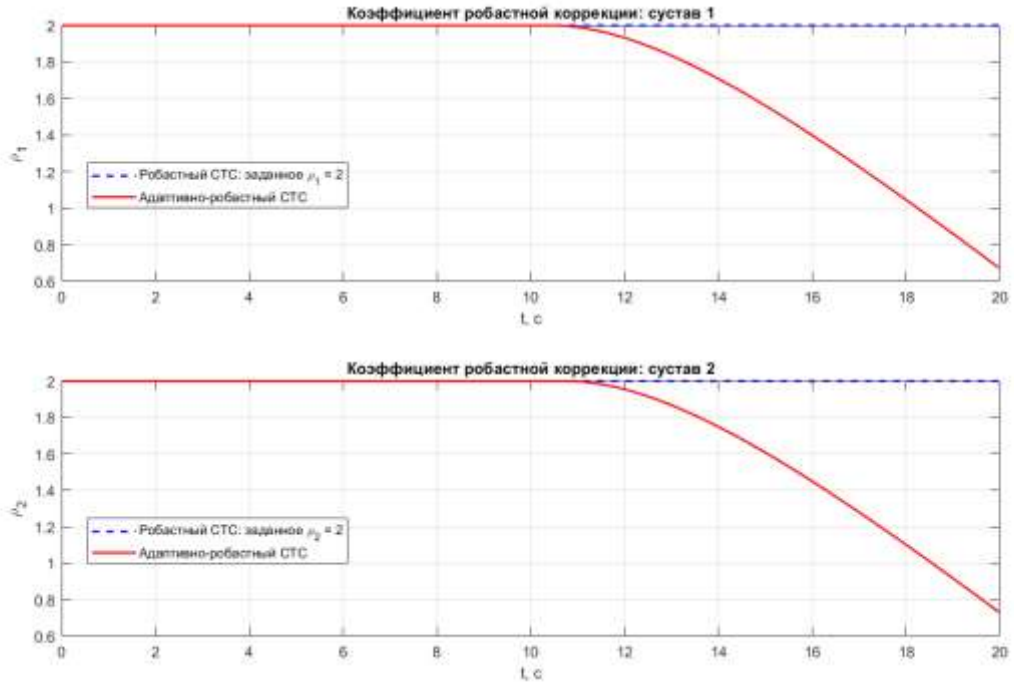

Рисунок 4.9 - Коэффициенты робастной коррекции. Сценарий 1

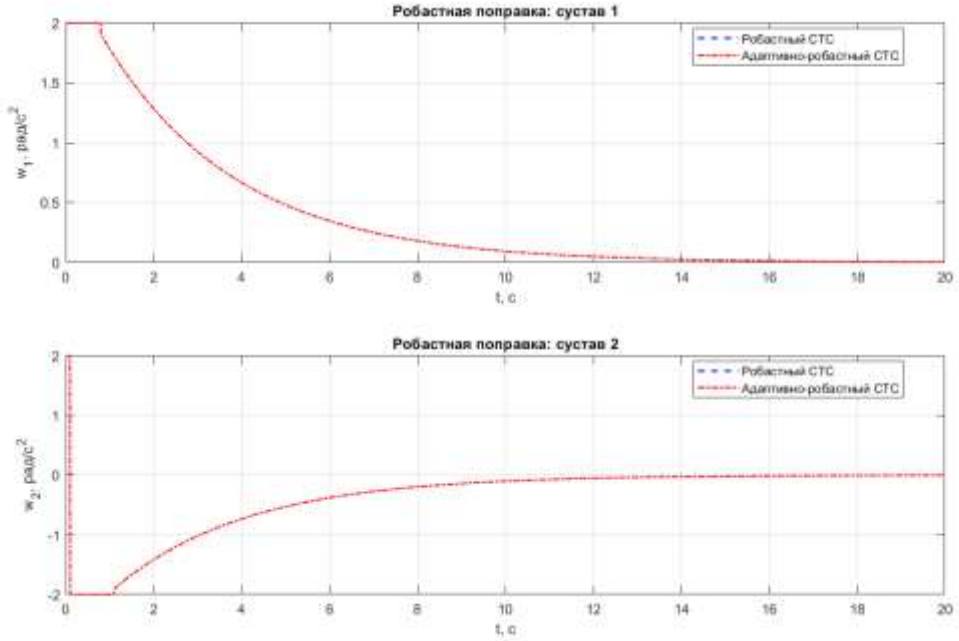

Рисунок 4.10 - Робастные поправки. Сценарий 1

На рисунке 4.9 наблюдаются участки уменьшения адаптивных коэффициентов, причём характер их изменения различается для первого и второго суставов. Одновременно величина робастной поправки приближается к малым значениям (рисунок 4.10). Эти зависимости характеризуют работу механизма настройки при точном соответствии модели объекту и отсутствии внешних возмущений.

Таблица 4.2 - Показатели сценария 1 (ошибки: 5–20 с)

Показатель	Единица	СТС	Робастный СТС	Адаптивно-робастный СТС
$e_{RMS,1}$	рад	8,8863e-14	0,0047533	0,0047533
$e_{RMS,2}$	рад	3,2585e-13	0,0052525	0,0052524
$e_{max,1}$	рад	3,3916e-13	0,014913	0,014913
$e_{max,2}$	рад	1,3122e-12	0,016479	0,016479
$\tau_{peak,1}$	Н·м	84,865	98,745	98,745
$\tau_{peak,2}$	Н·м	38,634	44,594	44,594
$\tau_{RMS,1}$	Н·м	26,084	26,086	26,086
$\tau_{RMS,2}$	Н·м	7,8263	7,8252	7,8252
$w_{RMS,1}$	рад/с²	0	0,15293	0,15293
$w_{RMS,2}$	рад/с²	0	0,16895	0,16896

Показатели таблицы 4.2 количественно характеризуют ошибки после исключения начального участка и величину управляющего воздействия. В

совокупности с графиками они отражают устранение начального рассогласования при точном соответствии модели объекту.

При точном соответствии модели объекту базовый СТС обеспечивает практически нулевые ошибки на выбранном интервале оценки. Робастная и адаптивно-робастная реализации имеют близкие показатели, но уступают базовому алгоритму по точности и характеризуются более высокими пиковыми моментами. Следовательно, в данном эксперименте дополнительная коррекция не даёт преимущества при отсутствии неопределённости и внешней нагрузки. Этот результат определяет исходный уровень сравнения: целесообразность робастной и адаптивной коррекции должна оцениваться прежде всего в условиях нарушения точности компенсации.

Во втором сценарии в регуляторе заданы оценки масс 0,85 кг при фактических массах 1 кг. Внешнее воздействие отсутствует. Начальные углы и скорости совпадают с начальными значениями программного движения. Поэтому возникающее отклонение связано с рассогласованием модели и объекта.

Траектории движения и ошибки слежения для сценария 2 представлены на рисунках 4.11 и 4.12.

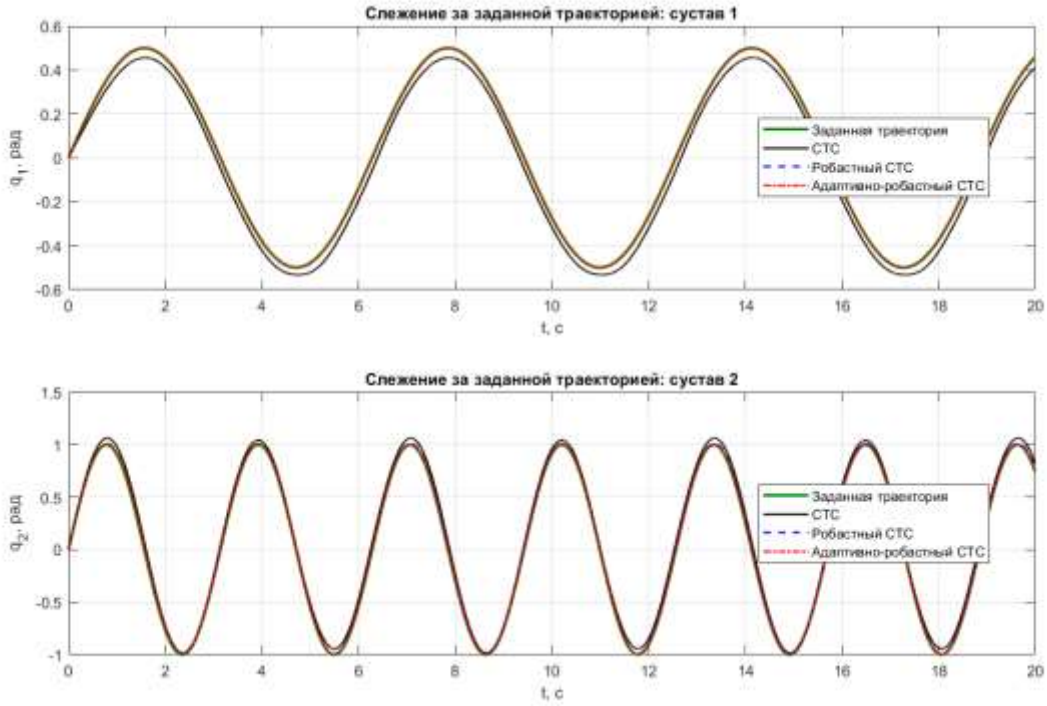

Рисунок 4.11 - Слежение за заданными траекториями. Сценарий 2

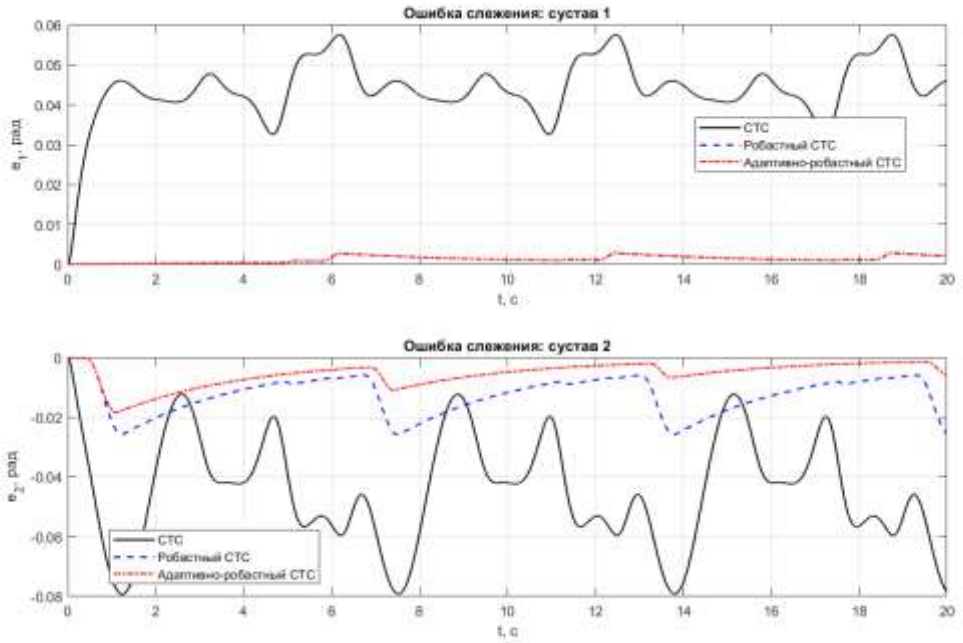

Рисунок 4.12 - Ошибки слежения. Сценарий 2

Начальные углы и скорости согласованы с программным движением, однако в процессе слежения возникают отклонения. Их появление при отсутствии внешних моментов связано с неточностью оценок масс. На графиках ошибок видна повторяющаяся структура, обусловленная движением манипулятора по периодической траектории.

Изменение управляющих моментов обоих суставов показано на рисунке 4.13.

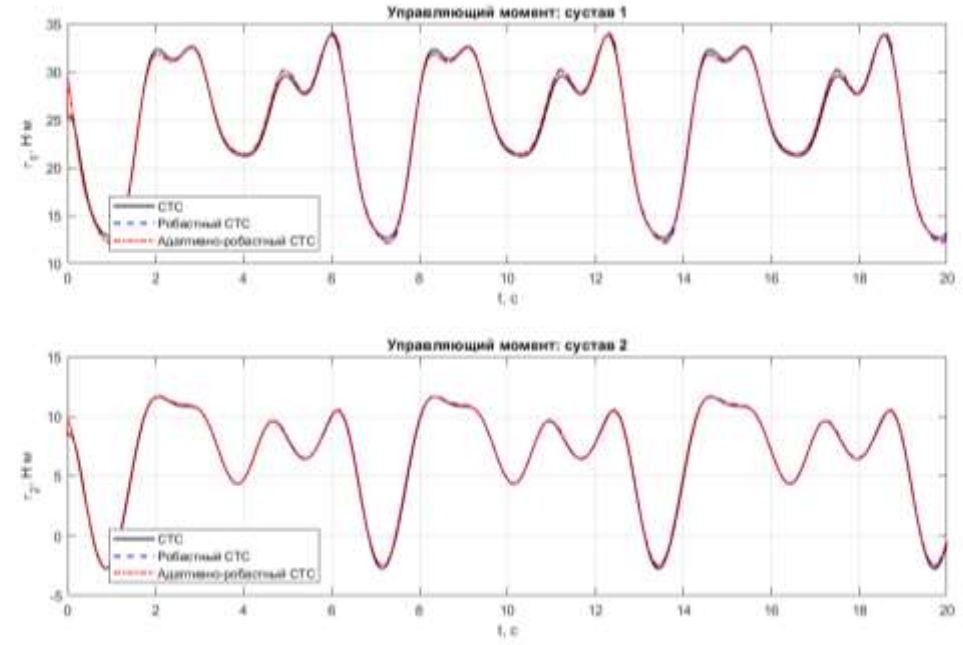

Рисунок 4.13 - Управляющие моменты. Сценарий 2

При согласованных начальных условиях управляющие моменты обеспечивают движение по периодической траектории в условиях неточных оценок масс. Их повторяющийся характер рассматривается совместно с сохраняющимися отклонениями положения.

Характер настройки коэффициентов и формируемые робастные поправки представлены на рисунках 4.14 и 4.15.

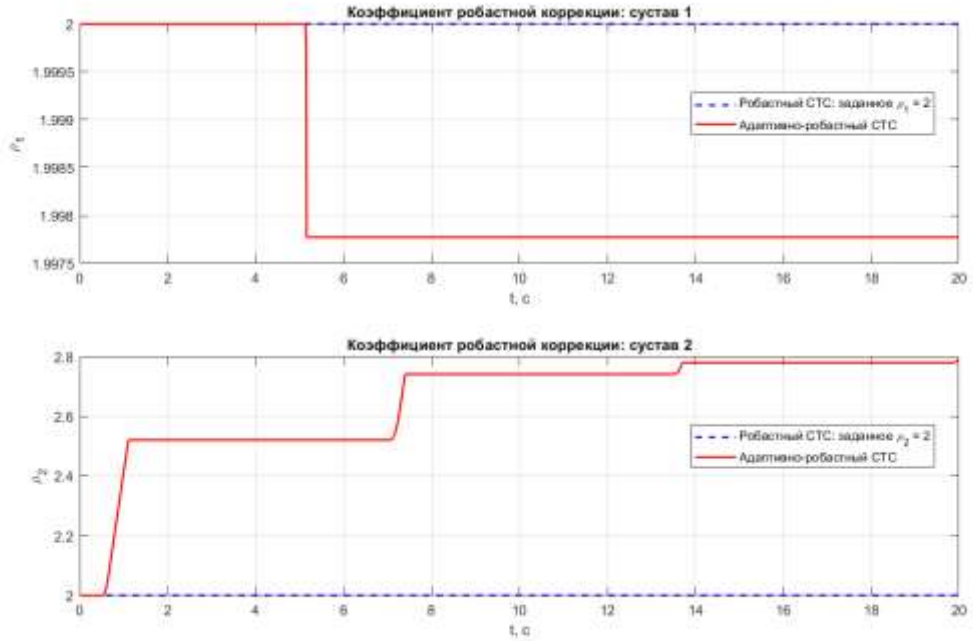

Рисунок 4.14 - Коэффициенты робастной коррекции. Сценарий 2

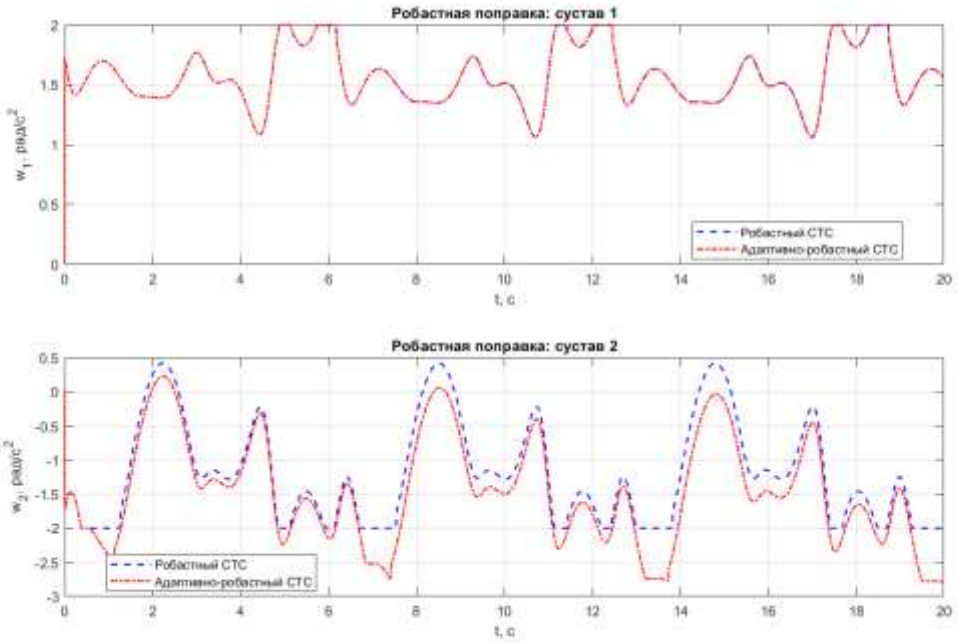

Рисунок 4.15 - Робастные поправки. Сценарий 2

При неточных оценках масс характер адаптивной настройки различается по суставам: коэффициент первого сустава остаётся близким к начальному значению, тогда как для второго сустава наблюдаются участки роста и

сохранения достигнутого уровня. Робастная поправка остаётся ненулевой при отсутствии внешнего воздействия, что согласуется с сохраняющимся рассогласованием модели регулятора и объекта. Количественные показатели точности траекторного управления во втором сценарии представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 - Показатели сценария 2 (ошибки: 5–20 с)

Показатель	Единица	СТС	Робастный СТС	Адаптивно-робастный СТС
$e_{RMS,1}$	рад	0,046027	0,0017131	0,0017594
$e_{RMS,2}$	рад	0,049588	0,013748	0,0047366
$e_{max,1}$	рад	0,057523	0,0028162	0,0029079
$e_{max,2}$	рад	0,079181	0,025844	0,010852
$\tau_{peak,1}$	Н·м	33,828	34,053	33,984
$\tau_{peak,2}$	Н·м	11,642	11,686	11,664
$\tau_{RMS,1}$	Н·м	26,008	26,094	26,09
$\tau_{RMS,2}$	Н·м	7,8288	7,8516	7,8341
$w_{RMS,1}$	рад/с²	0	1,6116	1,6115
$w_{RMS,2}$	рад/с²	0	1,4515	1,7358

Результаты моделирования подтверждают эффективность адаптивно-робастного алгоритма при неточных оценках масс манипулятора. По сравнению с базовым СТС среднеквадратические ошибки первого и второго суставов уменьшаются приблизительно на 96,18 и 90,45 % соответственно. Дополнительное преимущество адаптивной настройки относительно робастного СТС наиболее выражено во втором суставе: среднеквадратическая ошибка снижается на 65,55 %, а максимальная абсолютная ошибка на 58,01 %. При этом точность первого сустава остаётся близкой к результату постоянной робастной коррекции: абсолютная разность среднеквадратических ошибок составляет всего 0,0000463 рад. Улучшение точности второго сустава достигается при близких среднеквадратических и несколько меньших пиковых управляющих моментах обоих суставов. Таким образом, адаптивная настройка позволяет повысить точность слежения при параметрической неопределённости без увеличения общего уровня управляющих моментов в рассмотренном эксперименте.

В третьем сценарии сохраняются неточные оценки масс и согласованные с заданным движением начальные условия. Дополнительно на суставы действуют моменты sin(2t) и 0,5sin(3t) Н·м. Различные частоты внешнего воздействия формируют неодинаковую временную структуру ошибок по каналам.

Траектории движения и ошибки слежения для сценария 3 представлены на рисунках 4.16 и 4.17.

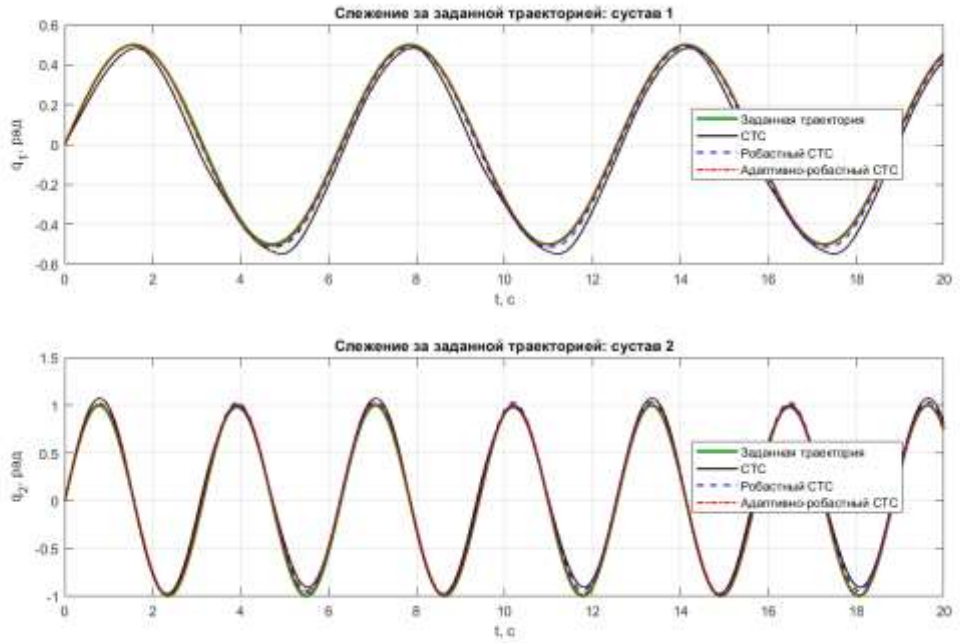

Рисунок 4.16 - Слежение за заданными траекториями. Сценарий 3

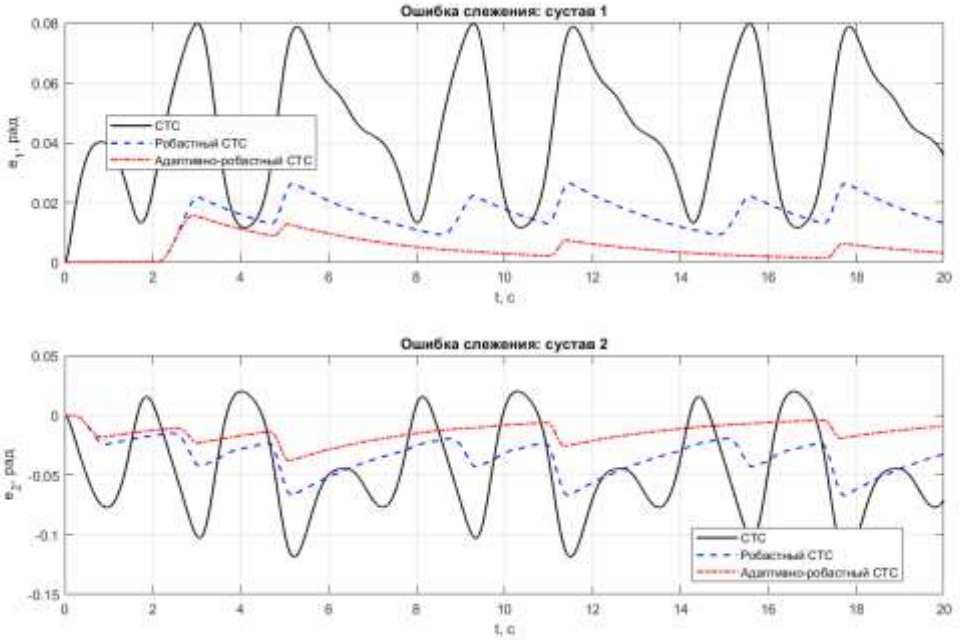

Рисунок 4.17 - Ошибки слежения. Сценарий 3

При совместном действии неточности модели и гармонических внешних моментов в ошибках сохраняются колебательные составляющие. На рассматриваемом интервале фактические траектории продолжают воспроизводить программное движение, нарастающего расхождения углов не наблюдается.

Изменение управляющих моментов обоих суставов показано на рисунке 4.18.

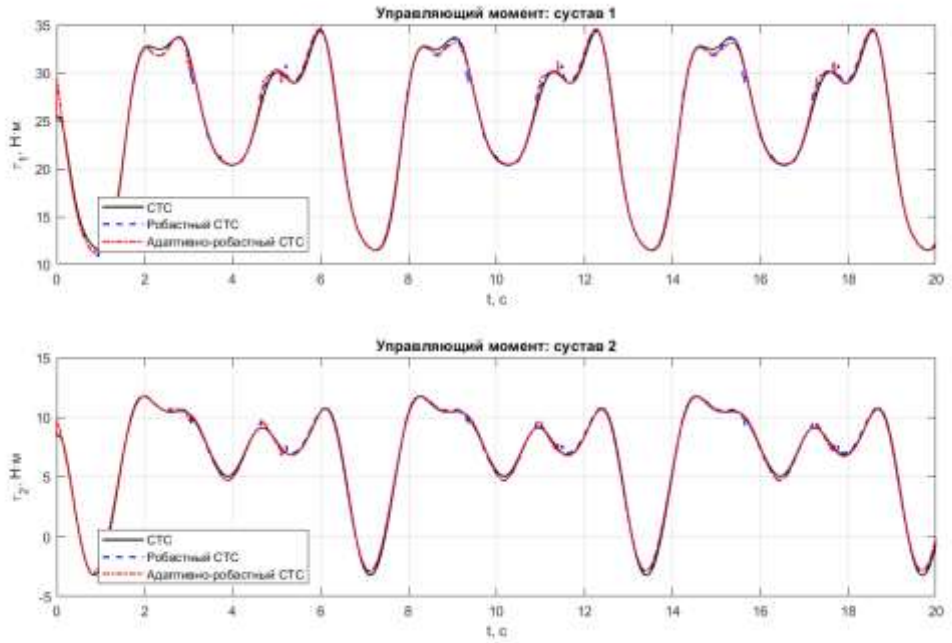

Рисунок 4.18 - Управляющие моменты. Сценарий 3

При действии гармонических внешних моментов управляющие воздействия изменяются в течение всего прогона. На представленном интервале не наблюдается нарастающего увеличения их амплитуды.

Характер настройки коэффициентов и формируемые робастные поправки представлены на рисунках 4.19 и 4.20.

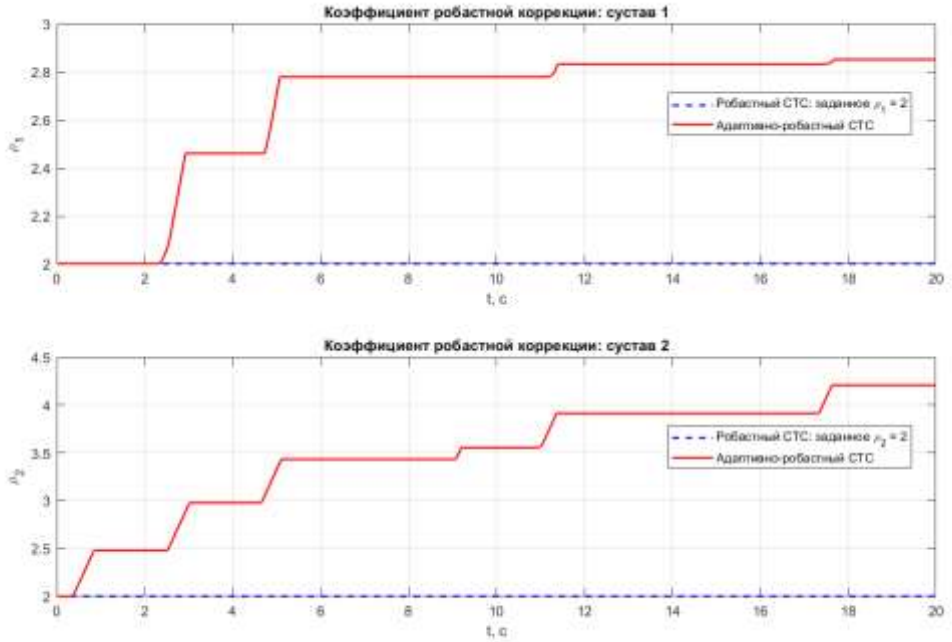

Рисунок 4.19 - Коэффициенты робастной коррекции. Сценарий 3

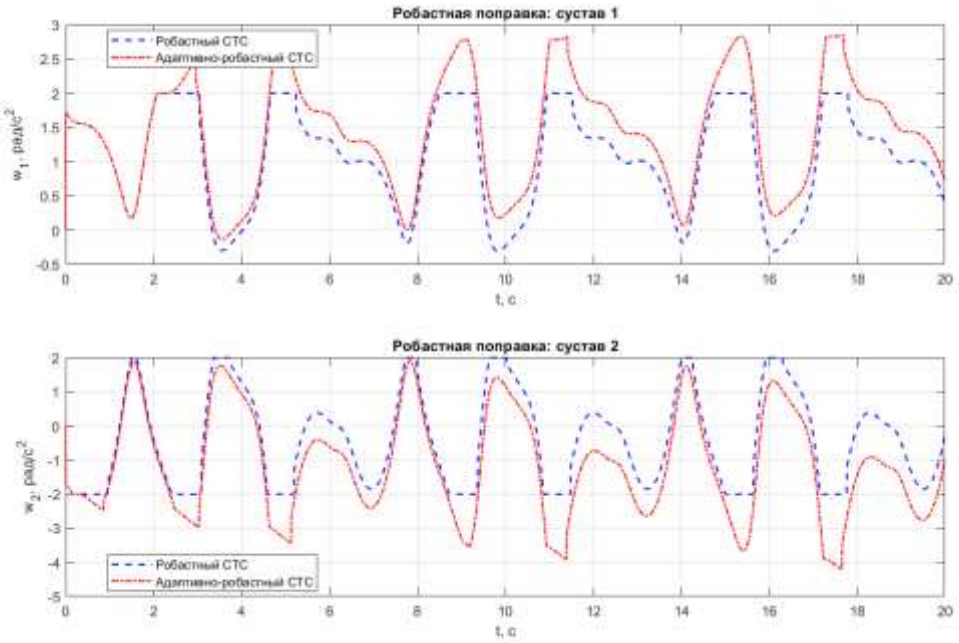

Рисунок 4.20 - Робастные поправки. Сценарий 3

При совместном действии параметрической неопределённости и гармонических внешних моментов наблюдаются участки увеличения адаптивных коэффициентов, чередующиеся с участками сохранения достигнутых значений. Робастные поправки имеют переменный знак и колебательный характер. Таким образом, настройка усилений и формирование корректирующего воздействия продолжаются в ходе движения.

Таблица 4.4 - Показатели сценария 3 (ошибки: 5-20 с)

Показатель	Единица	СТС	Робастный СТС	Адаптивно-робастный СТС
$e_{RMS,1}$	рад	0,051544	0,017758	0,0053289
$e_{RMS,2}$	рад	0,06345	0,041197	0,016431
$e_{max,1}$	рад	0,079769	0,026461	0,01279
$e_{max,2}$	рад	0,11852	0,067195	0,038159
$\tau_{peak,1}$	Н·м	34,352	34,543	34,575
$\tau_{peak,2}$	Н·м	11,756	11,763	11,751
$\tau_{RMS,1}$	Н·м	26,226	26,275	26,271
$\tau_{RMS,2}$	Н·м	7,9278	7,9272	7,8847
$w_{RMS,1}$	рад/с²	0	1,2754	1,7023
$w_{RMS,2}$	рад/с²	0	1,3654	1,9522

Результаты моделирования подтверждают преимущество адаптивно-робастного алгоритма при совместном действии параметрической неопределённости и гармонического возмущения. По сравнению с робастным СТС среднеквадратические ошибки первого и второго суставов уменьшаются на

69,99 и 60,12 %, а максимальные абсолютные ошибки на 51,66 и 43,21 % соответственно. Следовательно, адаптивная настройка снижает как общий уровень отклонений от заданной траектории, так и их наибольшие значения в обоих каналах управления. Повышение точности обеспечивается более интенсивной робастной коррекцией при практически неизменных среднеквадратических управляющих моментах и близких пиковых значениях. Таким образом, в рассмотренном эксперименте адаптивно-робастный алгоритм эффективнее компенсирует влияние неточности модели и внешней нагрузки, существенно улучшая качество слежения без существенного увеличения управляющих моментов.

В четвёртом сценарии исследуется реакция системы на изменение внешней нагрузки в пределах одного непрерывного прогона продолжительностью 120 с. Неточность оценок масс сохраняется на всём интервале. Внешние моменты задаются зависимостью A(t)[sin(2t); 0,5sin(3t)]. До 30 с внешнее воздействие отсутствует. На интервале 30-60 с амплитуды моментов равны 1 и 0,5 Н·м, а на интервале 60-90 с амплитуды моментов равны 2 и 1 Н·м. После 90 с внешние моменты снимаются. Коэффициенты адаптации между этапами не переинициализируются, поэтому каждый последующий этап начинается с настройки, сформированной в ходе предшествующего движения.

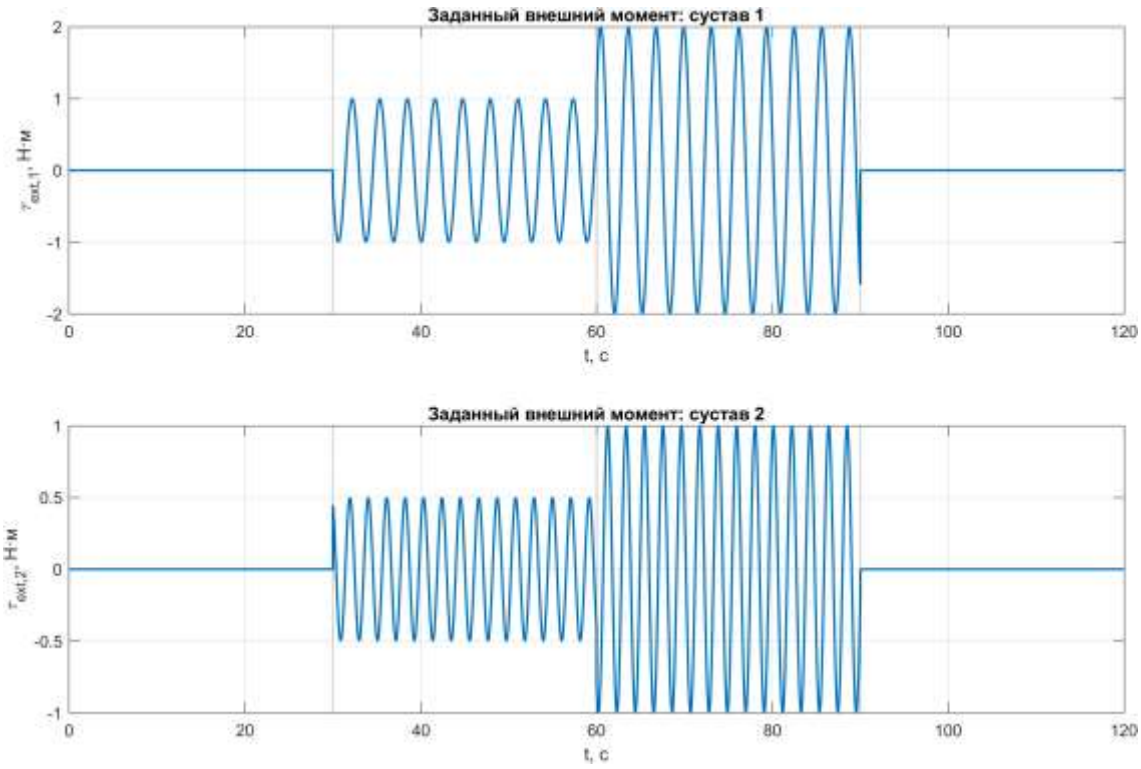

Рисунок 4.21 - Заданные внешние возмущающие моменты. Сценарий 4

Результаты рассматриваются отдельно для четырёх этапов изменения внешнего воздействия. Показатели, рассчитанные за полный этап, учитывают реакцию системы на переключение и последующее движение. Показатели заключительного десятисекундного участка характеризуют точность к концу

соответствующего этапа. Такое разделение позволяет оценить изменение качества слежения в ходе прогона.

Общий характер движения и ошибок слежения на интервале 0-120 с представлен на рисунках 4.22 и 4.23.

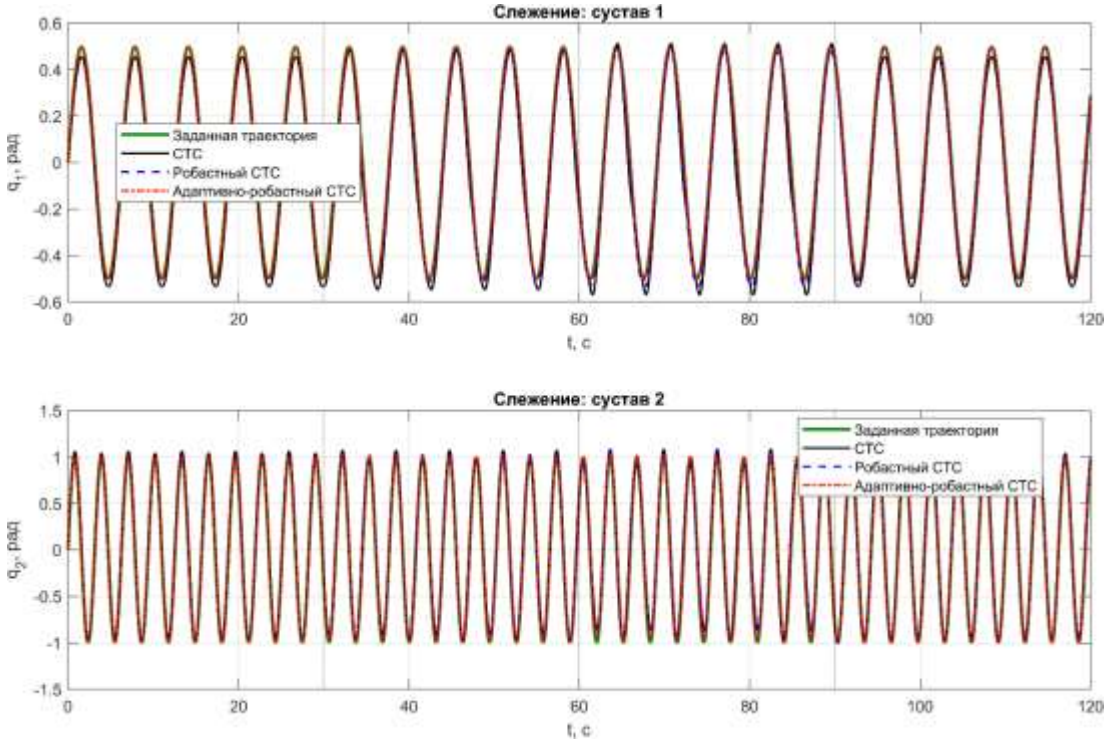

Рисунок 4.22 - Слежение за заданными траекториями на интервале 0–120 с. Сценарий 4

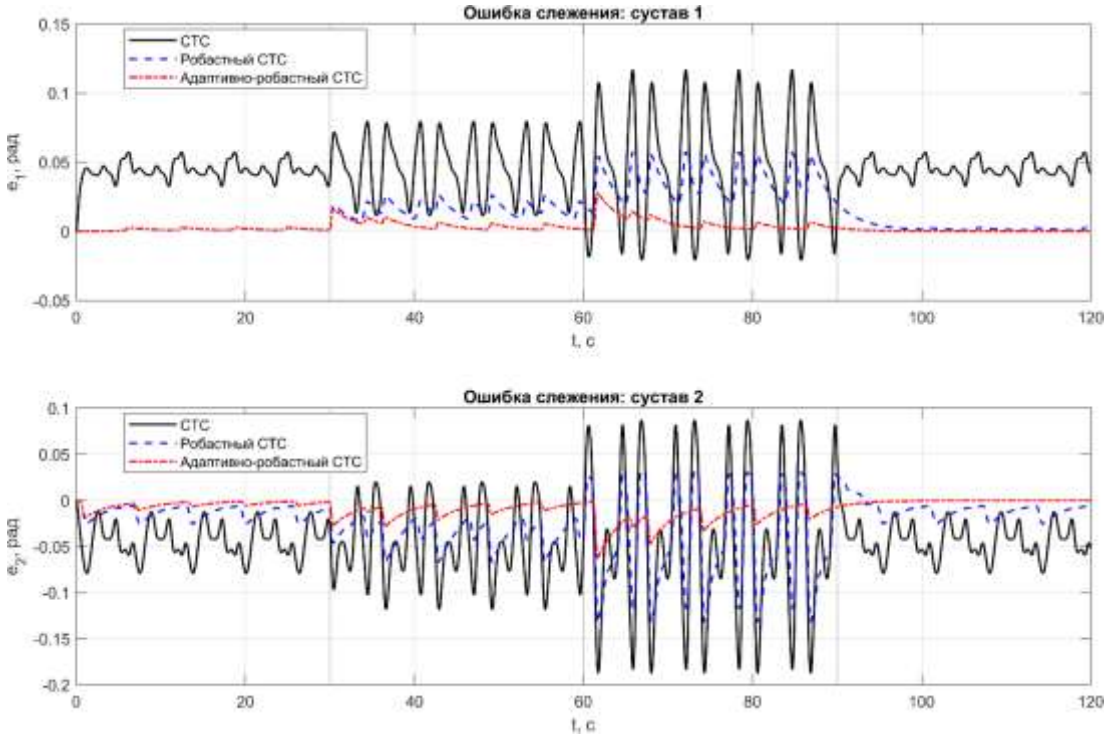

Рисунок 4.23 - Ошибки слежения на интервале 0-120 с. Сценарий 4

В моменты включения и усиления внешнего воздействия изменяется характер ошибок слежения. Для адаптивно-робастного алгоритма после переходных отклонений наблюдается уменьшение ошибки в ходе соответствующих этапов. После снятия внешних моментов ошибки этого алгоритма приближаются к малым значениям, несмотря на сохраняющуюся неточность оценок масс.

Управляющие моменты на всех четырёх этапах показаны на рисунке 4.24.

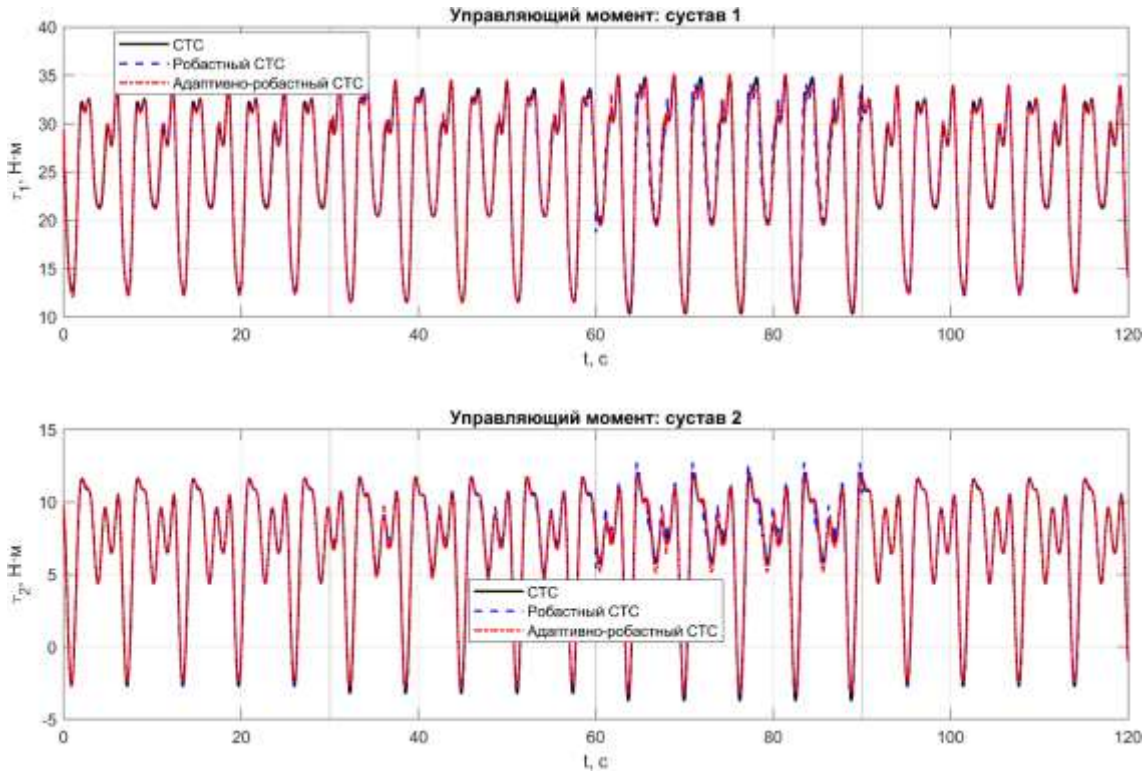

Рисунок 4.24 - Управляющие моменты на интервале 0-120 с. Сценарий 4

Моменты изменяются вместе с движением манипулятора и условиями внешнего воздействия. На представленном интервале их амплитуда остаётся конечной. Количественные характеристики приведены далее отдельно для каждого этапа.

Робастные поправки и изменение коэффициентов настройки приведены на рисунках 4.25 и 4.26.

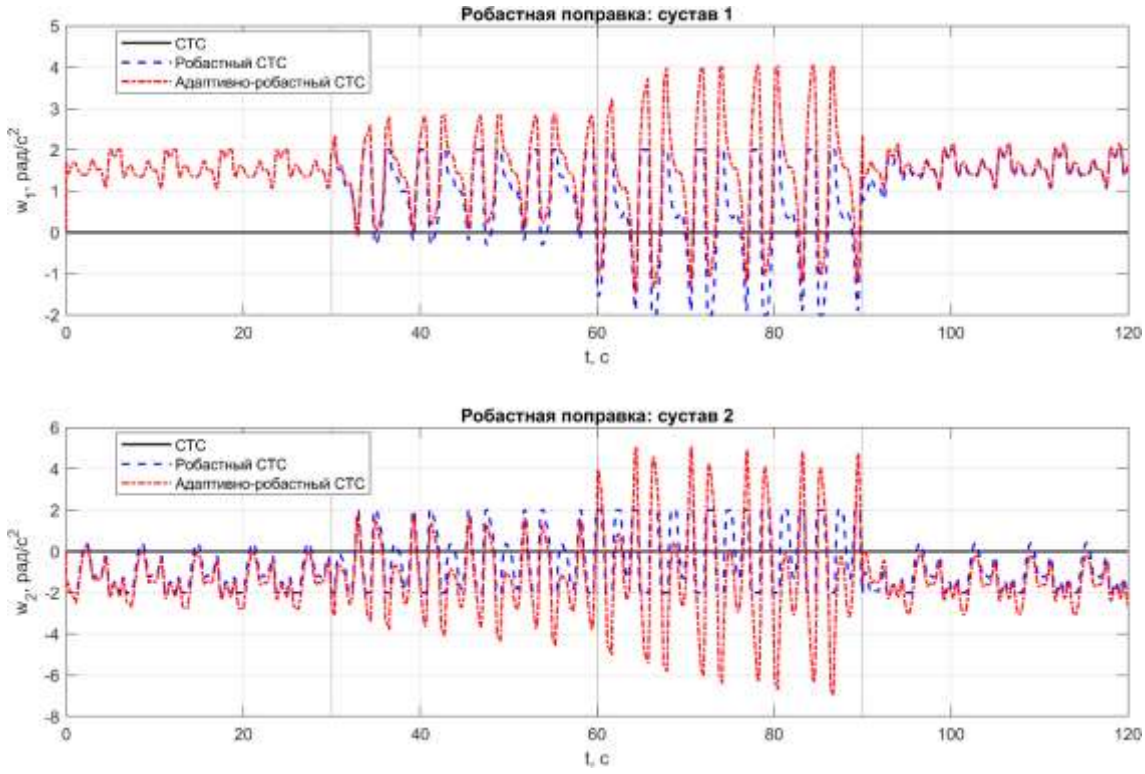

Рисунок 4.25 - Робастные поправки на интервале 0-120 с. Сценарий 4

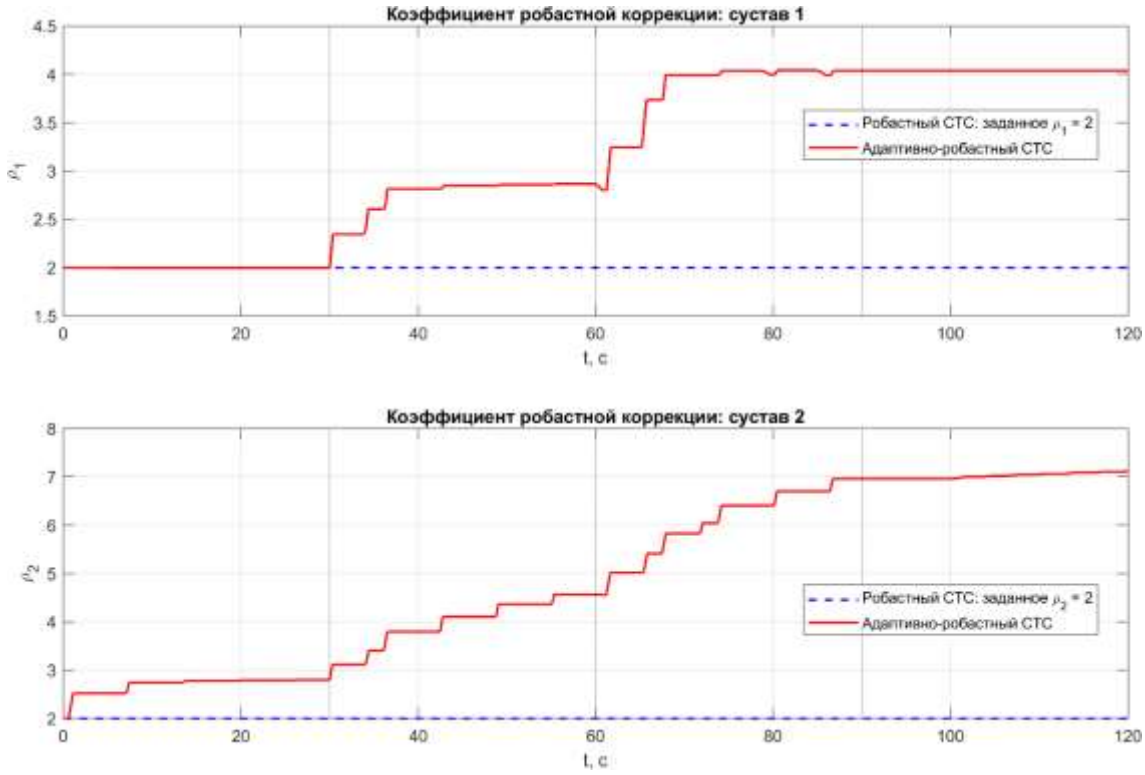

Рисунок 4.26 - Изменение коэффициентов робастной коррекции. Сценарий 4

При увеличении внешнего воздействия коэффициенты адаптации возрастают на отдельных участках прогона. Их изменение различается по суставам, что отражает покомпонентную работу закона настройки. После снятия

внешних моментов коэффициенты остаются повышенными. К окончанию эксперимента их значения составляют приблизительно 4 и 7 для первого и второго суставов соответственно.

Для сопоставления этапов показатели точности объединены в таблице 4.5. В таблице 4.6 представлены соответствующие значения на заключительных десятисекундных участках. Обозначения: СТС – базовый алгоритм; R – робастный СТС; AR – адаптивно-робастный СТС.

Таблица 4.5 – Показатели точности на полных этапах сценария 4

Время	Алгоритм	$e_{RMS,1}$	$e_{RMS,2}$	$e_{max,1}$	$e_{max,2}$
0–30	СТС	0,04446	0,047452	0,057523	0,079337
0–30	R	0,0015278	0,014459	0,0028163	0,025844
0–30	AR	0,0015703	0,0058319	0,0029097	0,018342
30–60	СТС	0,050675	0,061154	0,079769	0,11852
30–60	R	0,016803	0,038063	0,026461	0,067195
30–60	AR	0,005692	0,011882	0,016202	0,028863
60–90	СТС	0,060324	0,09283	0,11702	0,18765
60–90	R	0,037736	0,07117	0,057731	0,13232
60–90	AR	0,0083274	0,022351	0,028051	0,063204
90–120	СТС	0,045172	0,047048	0,057523	0,079181
90–120	R	0,0049267	0,013937	0,020391	0,026284
90–120	AR	0,00067314	0,0016648	0,0024694	0,0071869

Таблица 4.6 - Показатели точности на заключительных участках этапов сценария 4

Время	Алгоритм	$e_{RMS,1}$	$e_{RMS,2}$	$e_{max,1}$	$e_{max,2}$
20–30	СТС	0,044076	0,045952	0,057523	0,079181
20–30	R	0,0015981	0,0151	0,0028163	0,025843
20–30	AR	0,0016457	0,0032649	0,0029097	0,0057995
50–60	СТС	0,050099	0,060017	0,079769	0,11852
50–60	R	0,016674	0,037625	0,026461	0,067195
50–60	AR	0,0030607	0,0064279	0,0057624	0,011578
80–90	СТС	0,060821	0,093419	0,11702	0,18765
80–90	R	0,038278	0,074149	0,057731	0,13201
80–90	AR	0,0039069	0,013388	0,0067557	0,026088
110–120	СТС	0,045728	0,047223	0,057523	0,079181
110–120	R	0,0016544	0,012604	0,0028163	0,025843
110–120	AR	0,00028844	0,00016548	0,00030419	0,00020168

На начальном этапе (0–30 с) внешние моменты отсутствуют, однако оценки масс остаются неточными. Поэтому ненулевые ошибки и робастные поправки обусловлены параметрической неопределённостью. Данный этап позволяет оценить исходное состояние системы перед включением нагрузки. Ошибки на заключительном участке представлены на рисунке 4.27.

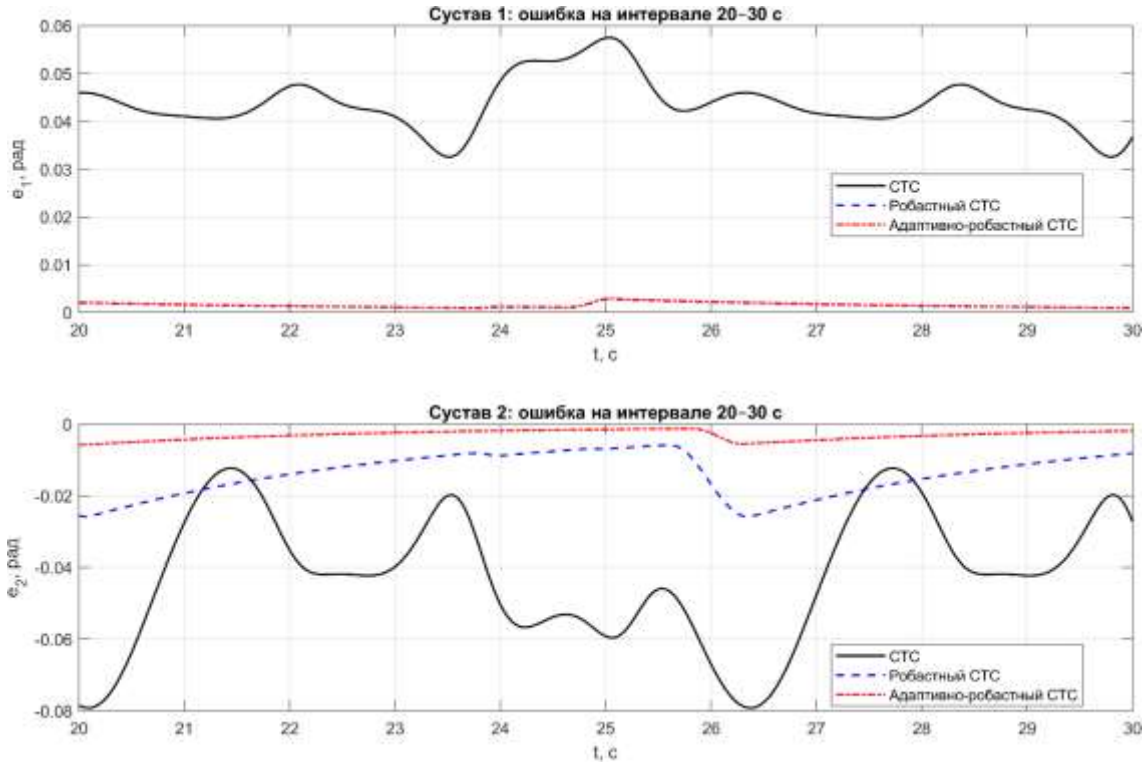

Рисунок 4.27 - Ошибки на заключительном участке начального этапа 20–30 с. Сценарий 4

Таким образом, результаты начального этапа согласуются с результатами второго сценария, а сформированная настройка коэффициентов робастной коррекции используется при дальнейшем движении манипулятора в условиях изменения внешней нагрузки.

В начале второго этапа (30–60 с) включаются гармонические моменты с амплитудами 1 и 0,5 Н·м. Возникающие переходные отклонения показаны на рисунке 4.28, ошибки к концу этапа на рисунке 4.29.

На интервале 30-60 с среднеквадратические ошибки адаптивно-робастного алгоритма составляют 0,0056920 и 0,011882 рад. По сравнению с робастным СТС они ниже на 66,13 и 68,78 %. Максимальные ошибки также меньше: 0,016202 и 0,028863 рад против 0,026461 и 0,067195 рад.

На заключительном участке 50-60 с среднеквадратические ошибки адаптивного алгоритма составляют 0,0030607 и 0,0064279 рад, то есть меньше значений, рассчитанных за полный этап. Внешние моменты продолжают действовать, поэтому улучшение точности наблюдается непосредственно под нагрузкой и согласуется с изменением коэффициентов коррекции.

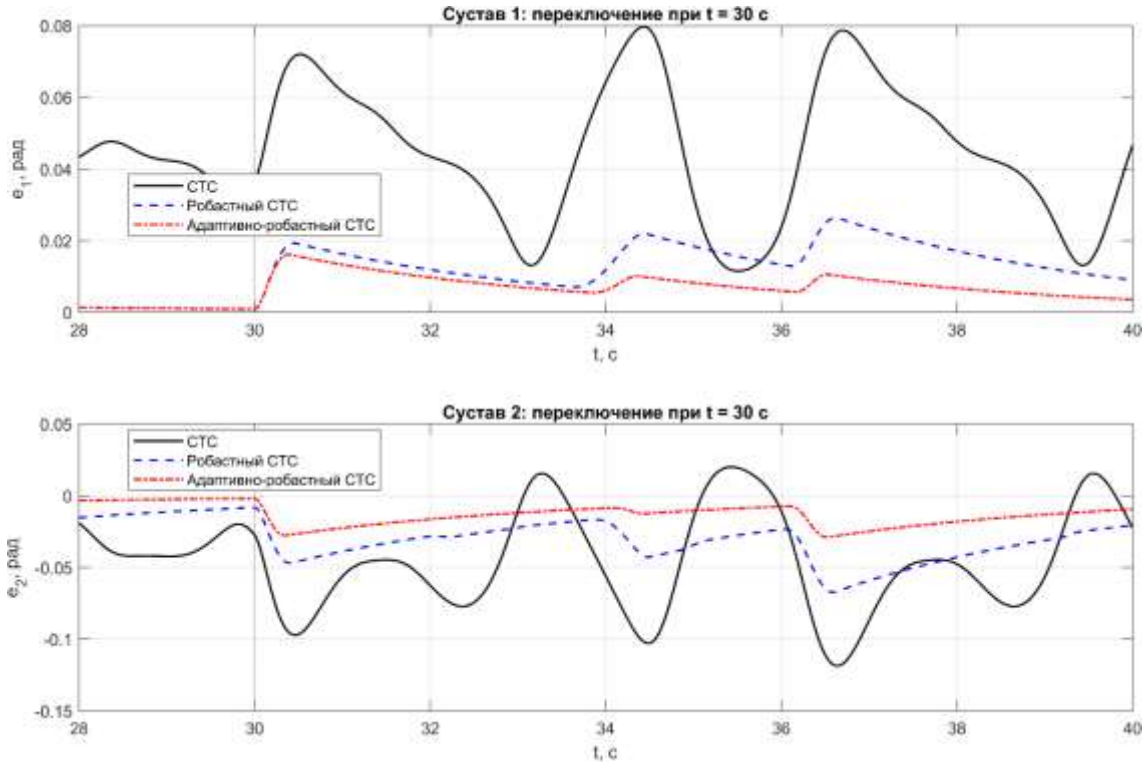

Рисунок 4.28 - Ошибки в окрестности включения возмущения при t = 30 с. Сценарий 4

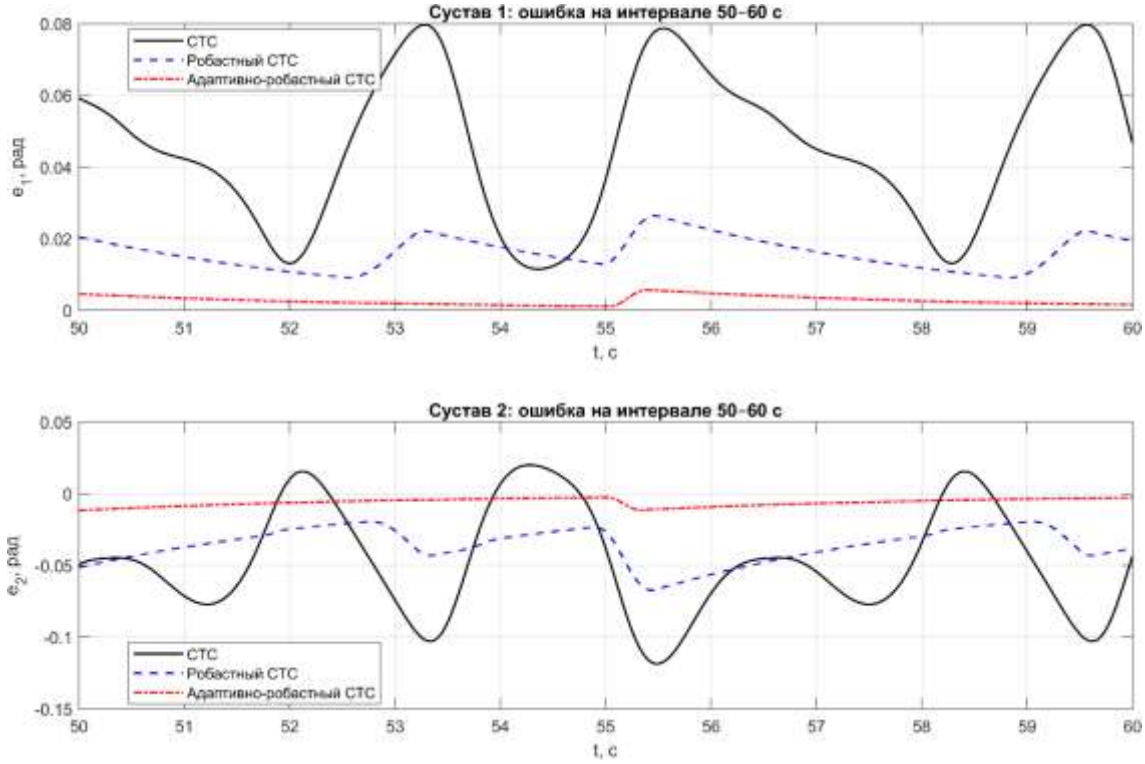

Рисунок 4.29 – Ошибки слежения на заключительном участке этапа действия возмущения, 50-60 с. Сценарий 4

В начале третьего этапа (60–90 с) амплитуды внешних моментов удваиваются и достигают 2 и 1 Н·м. Усиление нагрузки вызывает новые

переходные отклонения и дальнейшую настройку коэффициентов. Реакция системы и ошибки к концу этапа представлены на рисунках 4.30 и 4.31.

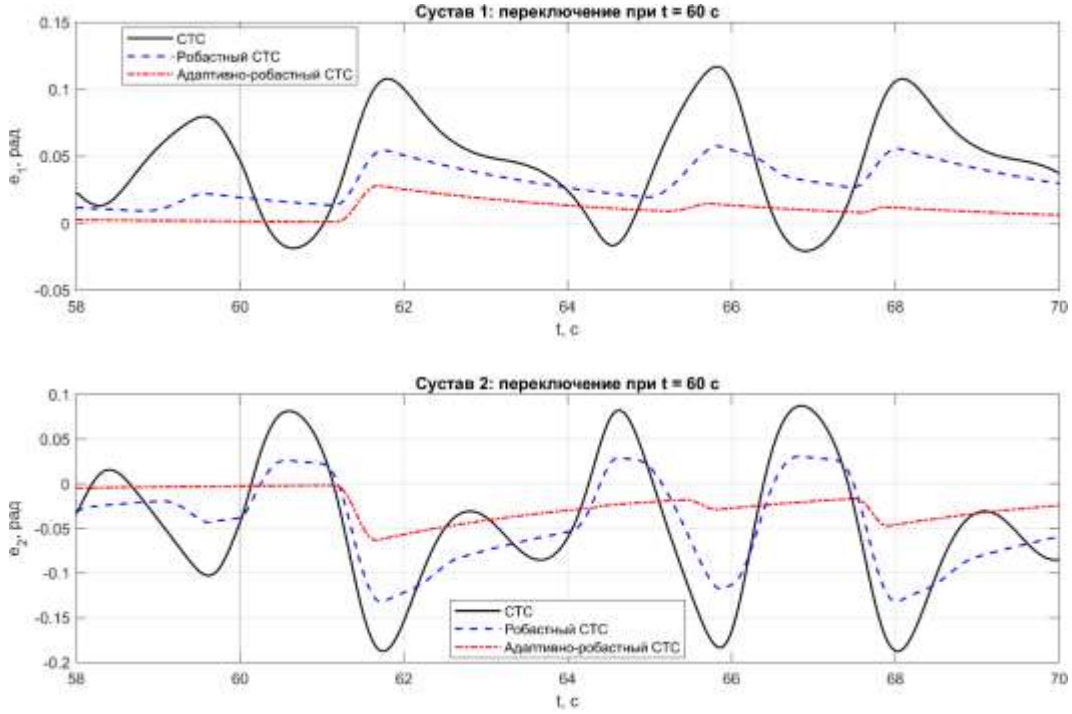

Рисунок 4.30 - Ошибки в окрестности усиления возмущения при t = 60 с. Сценарий 4

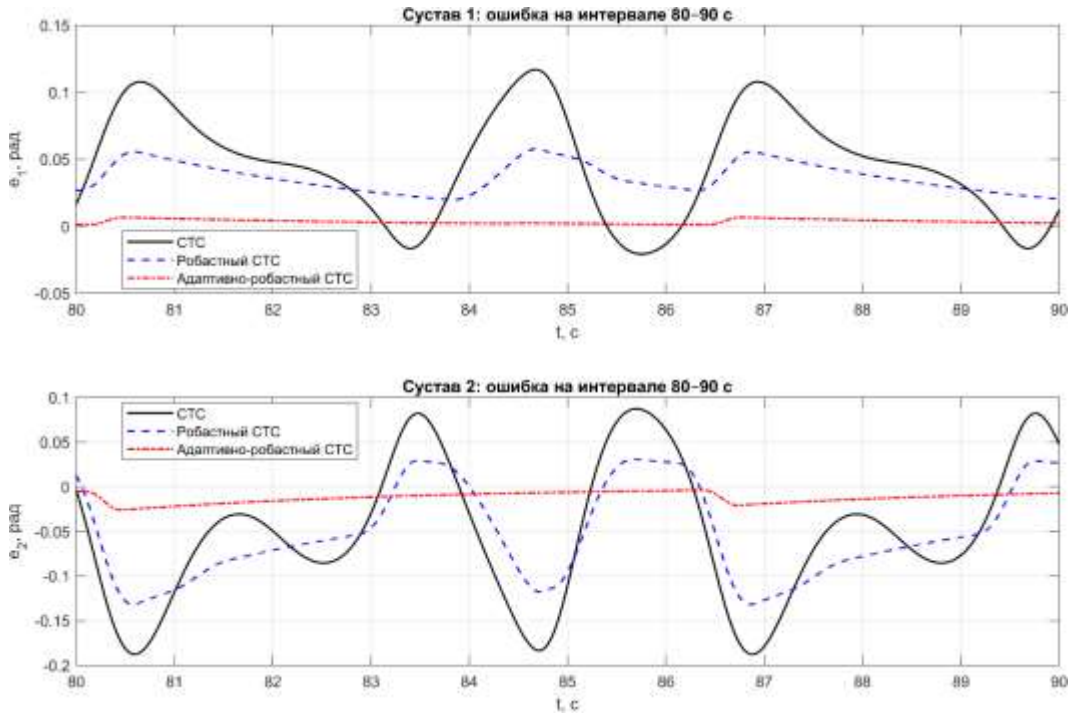

Рисунок 4.31 – Ошибки слежения на заключительном участке этапа усиленного возмущения, 80-90 с. Сценарий 4

Увеличение нагрузки приводит к росту ошибок всех рассматриваемых алгоритмов по сравнению с предыдущим этапом. Однако адаптивная реализация сохраняет преимущество по обоим суставам. На интервале 60-90 с её среднеквадратические ошибки составляют 0,0083274 и 0,022351 рад, что на 77,93 и 68,59 % меньше соответствующих ошибок робастного СТС.

К концу этапа среднеквадратические ошибки адаптивного алгоритма уменьшаются до 0,0039069 и 0,013388 рад. Максимальные ошибки на участке 80-90 с также ниже значений за полный этап. Таким образом, при сохраняющейся усиленной нагрузке настройка коэффициентов сопровождается улучшением точности в ходе движения. Полученные результаты показывают способность адаптивной коррекции реагировать на повышение интенсивности внешнего воздействия в исследованном диапазоне.

На заключительном этапе (90–120 с) внешние моменты равны нулю, но неточность оценок масс сохраняется. Коэффициенты адаптации не возвращаются принудительно к начальным значениям, система продолжает движение с настройкой, сформированной на предыдущих этапах. Ошибки представлены на рисунках 4.32 и 4.33.

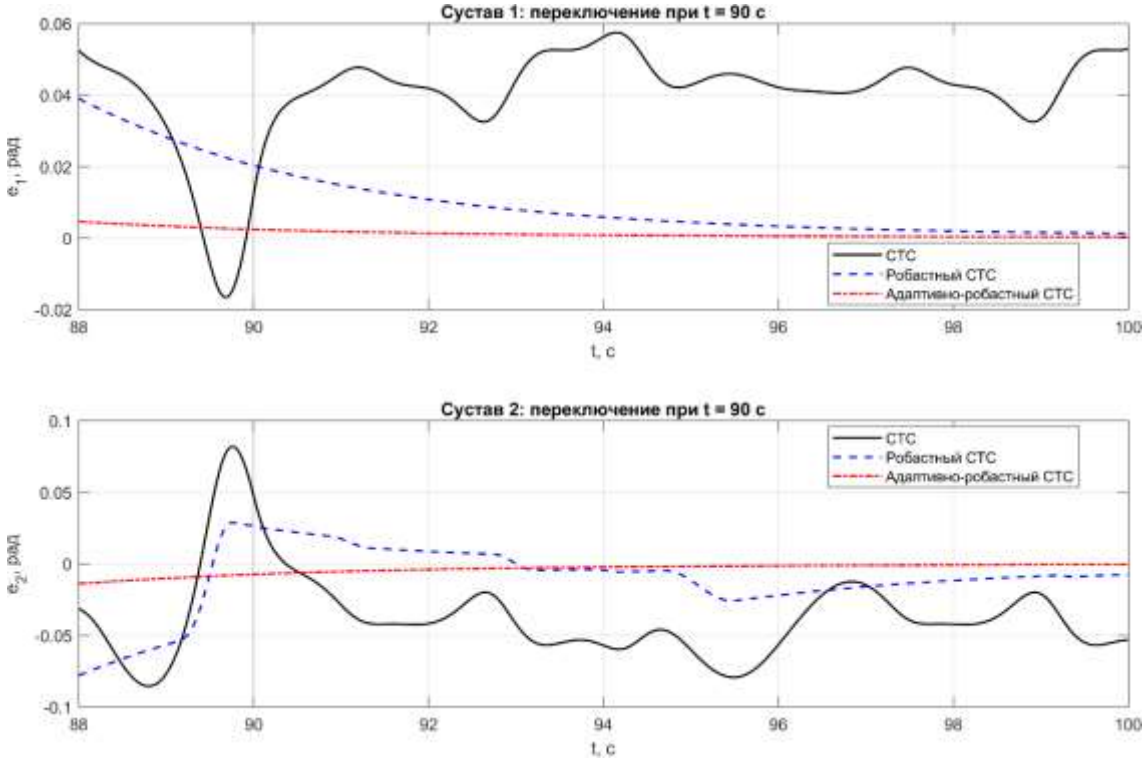

Рисунок 4.32 - Ошибки в окрестности снятия возмущения при t = 90 с. Сценарий 4

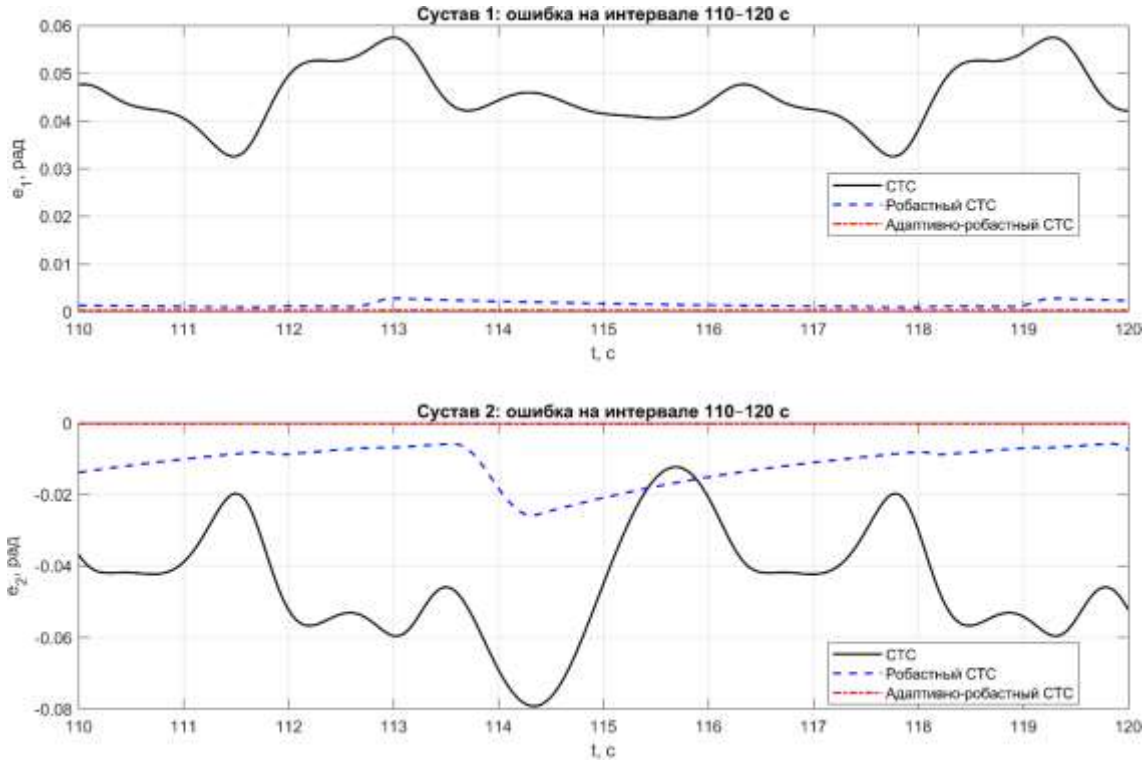

Рисунок 4.33 – Ошибки слежения на заключительном участке после снятия воздействия, 110-120 с. Сценарий 4

На интервале 90-120 с среднеквадратические ошибки адаптивного алгоритма составляют 0,00067314 и 0,0016648 рад. На заключительном участке 110-120 с они уменьшаются до 0,00028844 и 0,00016548 рад. Соответствующие значения робастного СТС равны 0,0016544 и 0,012604 рад.

Внешняя нагрузка на начальном и заключительном этапах отсутствует, однако результаты адаптивной системы различаются вследствие сохранения сформированной настройки. Повышенные коэффициенты продолжают использоваться для коррекции движения при неточных массах. Этот результат характеризует зависимость текущего поведения адаптивной системы от предшествующего процесса настройки.

Для оценки всего эксперимента, включая реакции на переключения, в таблице 4.7 приведены показатели за полный интервал 0-120 с.

За полный интервал среднеквадратические ошибки адаптивно-робастного алгоритма уменьшаются относительно базового СТС на 89,88% и 79,93 %, а относительно робастного СТС уменьшаются на 75,42 и 68,70 %. Следовательно, преимущество адаптивной настройки сохраняется при совместном учёте переходных отклонений и движения на всех этапах изменения нагрузки.

Улучшение точности достигается при близких среднеквадратических значениях полных управляющих моментов. Относительно робастного СТС они уменьшаются приблизительно на 0,05 % для первого сустава и на 0,60 % для второго. Пиковые моменты ниже соответственно на 0,21 и 6,15 %.

Одновременно среднеквадратические робастные поправки возрастают на 21,13 и 52,99 %. Таким образом, адаптивная система использует более

интенсивную коррекцию командного ускорения, обеспечивая снижение ошибок без сопоставимого увеличения полного управляющего момента в данном эксперименте. Поправка и момент характеризуют разные величины: первая входит в командное ускорение, а второй формируется с учётом модели динамики и текущего состояния манипулятора. Поэтому увеличение поправки не следует непосредственно отождествлять с пропорциональным увеличением момента или энергопотребления привода.

Таблица 4.7 - Итоговые показатели сценария 4 на интервале 0-120 с

Показатель	Ед. изм.	СТС	Робастный СТС	Адаптивно-робастный СТС
$e_{RMS,1}$	рад	0,050557	0,020814	0,0051153
$e_{RMS,2}$	рад	0,064851	0,041585	0,013015
$e_{max,1}$	рад	0,11702	0,057731	0,028051
$e_{max,2}$	рад	0,18765	0,13232	0,063204
$\tau_{peak,1}$	Н·м	34,877	35,254	35,181
$\tau_{peak,2}$	Н·м	12,027	12,742	11,958
$\tau_{RMS,1}$	Н·м	26,289	26,349	26,336
$\tau_{RMS,2}$	Н·м	8,0784	8,0978	8,0489
$w_{RMS,1}$	рад/с²	0	1,4518	1,7586
$w_{RMS,2}$	рад/с²	0	1,4841	2,2705

Проведённое компьютерное моделирование подтверждает эффективность разработанного адаптивно-робастного алгоритма траекторного управления при параметрической неопределённости и внешних возмущениях. Изменение коэффициентов робастной коррекции в ходе движения позволяет учитывать текущие ошибки слежения и адаптировать интенсивность корректирующего воздействия к условиям работы манипулятора. При совместном действии неточности модели и внешней нагрузки адаптивная настройка обеспечивает существенное уменьшение среднеквадратических и максимальных ошибок обоих суставов по сравнению с базовым СТС и робастным СТС с выбранными постоянными коэффициентами.

Эффективность алгоритма сохраняется при включении, усилении и снятии внешних моментов. За полный интервал эксперимента с переключением возмущения среднеквадратические ошибки уменьшаются относительно робастного СТС на 75,42 и 68,70 % для первого и второго суставов соответственно при близких среднеквадратических управляющих моментах. Полученные результаты показывают, что адаптивная настройка повышает точность воспроизведения заданной траектории без существенного увеличения управляющих моментов. В совокупности с теоретическим анализом подраздела 4.4 результаты моделирования обосновывают эффективность предложенного алгоритма в рассмотренных условиях движения.

Выводы по разделу 4

Исследована задача траекторного управления последовательным роботом-манипулятором в условиях неопределённости динамических параметров и внешних возмущающих моментов.

На основе точной линеаризации посредством обратной связи разработан адаптивно-робастный алгоритм траекторного управления последовательным манипулятором. Его особенность состоит в раздельной настройке коэффициентов робастной коррекции для каждого сочленения. В процессе движения алгоритм изменяет интенсивность коррекции с учётом ошибки слежения и производной соответствующей составляющей функции Ляпунова. Для замкнутой системы получены оценки ошибки слежения при условии достаточности текущих коэффициентов усиления.

Преимущество адаптивной настройки подтверждено результатами моделирования двухзвенного манипулятора в MATLAB/Simulink. При параметрической неопределённости и гармоническом возмущении на интервале 5–20 с адаптивный алгоритм снизил среднеквадратическую ошибку слежения относительно робастного алгоритма с постоянными коэффициентами на 69,99 % для первого сочленения и на 60,12 % для второго (таблица 4.4).

При последовательном изменении внешнего воздействия выигрыш в точности сохранился по итогам полного интервала моделирования 0–120 с. По сравнению с базовым методом вычисляемых моментов среднеквадратическая ошибка уменьшилась на 89,88 % для первого сочленения и на 79,93 % для второго. По сравнению с робастным алгоритмом с постоянными коэффициентами снижение составило 75,42 % и 68,70 % соответственно. При этом среднеквадратические значения полных управляющих моментов оставались близкими для сравниваемых алгоритмов (таблица 4.7).

Результаты предшествующих исследований отражены в обзоре адаптивных методов [52], в работе по управлению двухзвенным манипулятором с эталонной моделью [53] и в исследовании адаптивного контроллера при неизвестной кинематике и динамике [69]. Развитием этого направления в настоящей главе является настройка робастной коррекции по ошибкам слежения и производным составляющих функции Ляпунова.

Таким образом, обосновано третье положение, выносимое на защиту: в исследованных режимах параметрической неопределённости и внешних возмущений адаптивная настройка робастной коррекции повысила точность отслеживания заданной траектории по обоим сочленениям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации достигнута цель исследования: разработана геометрическая модель динамики последовательного робота-манипулятора и на её основе построена система адаптивного траекторного управления при неопределённости динамических параметров и действии внешних возмущений.

На основе кинематического описания манипулятора и распределения масс построен тензор кинетической энергии. Установлены условия, при которых он задаёт риманову метрику на конфигурационном пространстве. С использованием этой метрики получено бескоординатное уравнение динамики, связывающее ковариантное ускорение манипулятора с обобщёнными моментами приводов.

Из полученного уравнения выведен закон траекторного управления с обратной связью по обобщённым координатам и скоростям. Для полностью приводного манипулятора при невырожденной метрике и точном знании параметров модели такая обратная связь обеспечивает точную линеаризацию динамики. Для разработанного регулятора обоснована экспоненциальная сходимость ошибок положения и скорости к нулю.

Для повышения точности управления при параметрической неопределённости и внешних возмущениях разработан адаптивно-робастный алгоритм с раздельной настройкой коэффициентов коррекции по сочленениям. Методом Ляпунова получены оценки ошибки слежения при условии достаточности текущих коэффициентов усиления. По результатам компьютерного моделирования применение адаптивной настройки повысило точность отслеживания заданной траектории в исследованных режимах по сравнению с базовым методом вычисляемых моментов и робастным управлением с постоянными коэффициентами.

Обоснованы три научных положения, выносимых на защиту:

1. Геометрическая модель динамики последовательного манипулятора, основанная на представлении его конфигурационного пространства как риманова многообразия с метрикой, определяемой кинетической энергией.
2. Метод траекторного управления последовательным манипулятором, основанный на точной линеаризации его нелинейной динамики посредством обратной связи.
3. Адаптивно-робастный алгоритм траекторного управления последовательным манипулятором на основе точной линеаризации и адаптивной робастной коррекции, эффективность которого при параметрической неопределённости и внешних возмущениях подтверждена компьютерным моделированием.

Научная новизна работы заключается в том, что:

Представлена модель динамики последовательного манипулятора на римановом многообразии. Конфигурационное пространство манипулятора рассматривается как гладкое многообразие с заданной на нём метрикой, физически интерпретируемой как тензор кинетической энергии манипулятора. Впервые уравнение динамики манипулятора сформулировано в

бескоординатной форме с использованием ковариантного дифференцирования на римановом многообразии. Впервые в рамках разработанной модели обобщённые скорости, силы и импульсы представлены в единой векторной форме. Обобщённая скорость является вектором касательного пространства, а ковекторам обобщённых сил и импульсов посредством метрики сопоставлены векторы того же пространства. В такой форме уравнение динамики манипулятора выражает формальную аналогию со вторым законом Ньютона для материальной точки.

Предложена оригинальная процедура точной линеаризации уравнений динамики последовательного манипулятора, записанных в геометрической форме на римановом многообразии. Процедура реализуется посредством обратной связи по обобщённым координатам и скоростям манипулятора.

Разработан новый метод адаптивно-робастного траекторного управления последовательным манипулятором, основанный на точной линеаризации геометрических уравнений динамики и адаптивной настройке коэффициентов робастной коррекции для каждого сочленения.

По теме диссертации опубликовано 8 научных работ, в том числе: 1 статья в журнале Sensors, индексируемом в Scopus и Web of Science Core Collection по показателю CiteScore за 2025 год журнал входит в квартиль Q1 по трём направлениям Scopus - Instrumentation (91-й процентиль), Electrical and Electronic Engineering (87-й процентиль) и Computer Science: Information Systems (83-й процентиль); 4 статьи в научных изданиях, рекомендуемых уполномоченным органом Республики Казахстан в области науки и высшего образования, и 3 работы в материалах международных научных конференций. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации объекта авторского права на программу для ЭВМ. А также результаты исследования внедрены в учебный процесс НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева» по образовательной программе 7М07101 «Автоматизация и управление» и используются при преподавании дисциплины «Адаптивное управление роботом-манипулятором» (Акт о внедрении научно-исследовательской работы в учебный процесс от 28.02.2024 г.).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ryalat M., Almtireen N., Al-refai G., Elmoaqet H., Rawashdeh N. Research and Education in Robotics: A Comprehensive Review, Trends, Challenges, and Future Directions // Journal of Sensor and Actuator Networks. – 2025. – Vol. 14, № 4. – Article 76. DOI: 10.3390/jsan14040076.

2. Urrea C., Kern J. Recent Advances and Challenges in Industrial Robotics: A Systematic Review of Technological Trends and Emerging Applications // Processes. – 2025. – Vol. 13, № 3. – Article 832. DOI: 10.3390/pr13030832.

3. Calzada-Garcia A., Victores J. G., Naranjo-Campos F. J., Balaguer C. A Review on Inverse Kinematics, Control and Planning for Robotic Manipulators With and Without Obstacles via Deep Neural Networks // Algorithms. – 2025. – Vol. 18, № 1. – Article 23. DOI: 10.3390/a18010023.

4. Wang K., Ding L., Dailami F., Matthews J. A Contemporary Review of Collaborative Robotics Employed in Manufacturing Finishing Operations: Recent Progress and Future Directions // Machines. – 2025. – Vol. 13, № 9. – Article 772. DOI: 10.3390/machines13090772.

5. Urrea C. Artificial Intelligence-Driven and Bio-Inspired Control Strategies for Industrial Robotics: A Systematic Review of Trends, Challenges, and Sustainable Innovations Toward Industry 5.0 // Machines. – 2025. – Vol. 13, № 8. – Article 666. DOI: 10.3390/machines13080666.

6. Kuatova M., Tuleshov A., Halicioglu R., Baurzhan A., Kamal A., Adilkhan A. Hybrid-Actuated Linkage Mechanisms: Design, Control, and Energy Management // Machines. – 2026. – Vol. 14, № 10. – Article 1189. DOI: 10.3390/machines14101189.

7. Pollák M., Kočiško M., Grozav S. D., Ceclan V., Bogdan A. D. Suitability of UR5 Robot for Robotic 3D Printing // Applied Sciences. – 2024. – Vol. 14, № 21. – Article 9845. DOI: 10.3390/app14219845.

8. Alvares A. J., Rodriguez E., Figueroa B. Digital-Twin-Enabled Process Monitoring for a Robotic Additive Manufacturing Cell Using Wire-Based Laser Metal Deposition // Processes. – 2025. – Vol. 13, № 8. – Article 2335. DOI: 10.3390/pr13082335.

9. Freitas B., Richhariya V., Silva M., Vaz A., Lopes S. F., Carvalho Ó. A Review of Hybrid Manufacturing: Integrating Subtractive and Additive Manufacturing // Materials. – 2025. – Vol. 18, № 18. – Article 4249. DOI: 10.3390/ma18184249.

10. Picozzi P., Nocco U., Labate C., Gambini I., Puleo G., Silvi F., Pezzillo A., Mantione R., Cimolin V. Advances in Robotic Surgery: A Review of New Surgical Platforms // Electronics. – 2024. – Vol. 13, № 23. – Article 4675. DOI: 10.3390/electronics13234675.

11. Ragusa A. et al. The Evolution of Robotic Surgery through the Machine Design Innovation // Uro. – 2024. – Vol. 4, № 3. – P. 124–135. DOI: 10.3390/uro4030010.

12. Caringi S. et al. The da Vinci Single-Port Robotic Platform in General Surgery: A Scoping Review of Current Applications and Outcomes // Journal of Clinical Medicine. – 2025. – Vol. 14, № 22. – Article 8212. DOI: 10.3390/jcm14228212.

13. Dremann K. et al. A Review of Advancements in Inspection, Manufacturing and Repair, and Robots for On-Orbit Servicing, Assembly, and Manufacturing (OSAM) of Spacecraft // Aerospace. – 2025. – Vol. 12, № 9. – Article 819. DOI: 10.3390/aerospace12090819.

14. D'Ambrosio M., Capra L., Brandonisio A., Silvestrini S., Lavagna M. Redundant Space Manipulator Autonomous Guidance for In-Orbit Servicing via Deep Reinforcement Learning // Aerospace. – 2024. – Vol. 11, № 5. – Article 341. DOI: 10.3390/aerospace11050341.

15. Wu W., Gao J. A Comprehensive Review of Research and Applications of Intelligent Manipulators in Agriculture // Agronomy. – 2026. – Vol. 16, № 11. – Article 1041. DOI: 10.3390/agronomy16111041.

16. Fontani M., Luglio S. M., Gagliardi L., Peruzzi A., Frasconi C., Raffaelli M., Fontanelli M. A Systematic Review of 59 Field Robots for Agricultural Tasks: Applications, Trends, and Future Directions // Agronomy. – 2025. – Vol. 15, № 9. – Article 2185. DOI: 10.3390/agronomy15092185.

17. Linford J., Haghshenas-Jaryani M. A ground robotic system for crops and soil monitoring and data collection in New Mexico chile pepper farms // Discover Agriculture. – 2024. – Vol. 2. – Article 101. DOI: 10.1007/s44279-024-00113-3.

18. Lisondra M., Benhabib B., Nejat G. Embodied AI with Foundation Models for Mobile Service Robots: A Systematic Review // Robotics. – 2026. – Vol. 15, № 3. – Article 55. DOI: 10.3390/robotics15030055.

19. Liu R., Guo Y., Jin R., Zhang X. A Review of Natural-Language-Instructed Robot Execution Systems // AI. – 2024. – Vol. 5, № 3. – P. 948–989. DOI: 10.3390/ai5030048.

20. Antonov A. Parallel–Serial Robotic Manipulators: A Review of Architectures, Applications, and Methods of Design and Analysis // Machines. – 2024. – Vol. 12, № 11. – Article 811. DOI: 10.3390/machines12110811.

21. Park F. C., Bobrow J. E., Ploen S. R. A Lie Group Formulation of Robot Dynamics // The International Journal of Robotics Research. – 1995. – Vol. 14, № 6. – P. 609–618. DOI: 10.1177/027836499501400606.

22. Bullo F., Lewis A. D. Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems. – New York: Springer, 2005. – 727 p. DOI: 10.1007/978-1-4899-7276-7.

23. Spong M. W. An Historical Perspective on the Control of Robotic Manipulators // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. – 2022. – Vol. 5. – P. 1–31. DOI: 10.1146/annurev-control-042920-094829.

24. Li L., Wang F., Tang H., Liang Y. Variable-Parameter Impedance Control of Manipulator Based on RBFNN and Gradient Descent // Sensors. – 2025. – Vol. 25, № 1. – Article 49. DOI: 10.3390/s25010049.

25. Kallel H., Iqbal K. Online Estimation of Manipulator Dynamics for Computed Torque Control of Robotic Systems // Sensors. – 2025. – Vol. 25, № 22. – Article 6831. DOI: 10.3390/s25226831.

26. Tam L. T. M., Ngu N. V., Pham D. H., Vu M. T. Robust Augmented Computed Torque Control for Enhanced Tracking of 6-DoF Manipulators Under

External Disturbances // Applied Sciences. – 2026. – Vol. 16, № 10. – Article 5036. DOI: 10.3390/app16105036.

27. Galarce-Acevedo P., Torres-Torriti M. Discrete-Time Computed Torque Control with PSO-Based Tuning for Energy-Efficient Mobile Manipulator Trajectory Tracking // Robotics. – 2026. – Vol. 15, № 1. – Article 19. DOI: 10.3390/robotics15010019.

28. Ding L., Xia T., Ma R., Liang D., Lu M., Wu H. Enhanced Impedance Control of Cable-Driven Unmanned Aerial Manipulators Using Fractional-Order Nonsingular Terminal Sliding Mode Control with Disturbance Observer Integration // Fractal and Fractional. – 2024. – Vol. 8, № 10. – Article 579. DOI: 10.3390/fractalfract8100579.

29. Waseem S., Adnan M., Iqbal M. S., Amin A. A., Shah A., Tariq M. From classical to intelligent control: Evolving trends in robotic manipulator technology // Computers and Electrical Engineering. – 2025. – Vol. 127. – Article 110559. – DOI: 10.1016/j.compeleceng.2025.110559

30. Kussaiyn-Murat A., Kadyroldina A., Krasavin A., Tolykbayeva M., Orazova A., Nazenova G., Krak I., Haidegger T., Alontseva D. Application of Discrete Exterior Calculus Methods for the Path Planning of a Manipulator Performing Thermal Plasma Spraying of Coatings // Sensors. – 2025. – Vol. 25, № 3. – Article 708. DOI: 10.3390/s25030708.

31. Krasavin A., Kadyroldina A., Alontseva D., Tolykbayeva M. Surface Restoration Based on Scanning Data // Proceedings of the 18th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2023). – Székesfehérvár, Hungary, 2023. – P. 68–72.

32. Bedrossian N. S., Spong M. W. Feedback Linearization of Robot Manipulators and Riemannian Curvature // Journal of Robotic Systems. – 1995. – Vol. 12, № 8. – P. 541–552. DOI: 10.1002/rob.4620120804.

33. Tong Y., Liu J., Zhou H., Ju Z., Zhang X. Adaptive Tracking Control of Robotic Manipulators with Unknown Kinematics and Uncertain Dynamics // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. – 2024. – Vol. 21, № 4. – P. 5252–5269. DOI: 10.1109/TASE.2023.3309964.

34. Jokar H., Naghipour A., Jeloudari I. A New Adaptive Robust Control Scheme for Trajectory Tracking of Robot Manipulators With Uncertain Dynamics Model // IET Control Theory & Applications. – 2025. – Vol. 19, № 1. – Article e70039. DOI: 10.1049/cth2.70039.

35. Tinoco V., Silva M. F., Santos F. N., Morais R., Magalhães S. A., Oliveira P. M. A Review of Advanced Controller Methodologies for Robotic Manipulators // International Journal of Dynamics and Control. – 2025. – Vol. 13. – Article 36. DOI: 10.1007/s40435-024-01533-1.

36. Mustary S., Kashem M. A., Sony J. M., Hossain N., Chowdhury M. A. Advancing Stability in Robot Manipulators: A Review of Recent Progress and Parameters // Engineering Reports. – 2025. – Vol. 7, № 7. – Article e70207. DOI: 10.1002/eng2.70207.

37. Chen C., Du F., Chen B., Chen D., He W., Chen Q., Zhang C., Wu J., Wang J. Practical Prescribed Tracking Control of n-DOF Robotic Manipulator with

Uncertainties via Friction Compensation Approach // Symmetry. – 2024. – Vol. 16, № 4. – Article 423. DOI: 10.3390/sym16040423.

38. Fu J., Liu X., Liu Y., Chen Z., Yao B. Fast and Accurate Tracking Control of Robotic Manipulators Subject to State Constraints and Input Saturation by Effectively Integrating Planning Strategies // ISA Transactions. – 2024. – Vol. 149. – P. 373–380. DOI: 10.1016/j.isatra.2024.04.012.

39. Javaid U., Basin M., Ijaz S., Khan M. N., Garza-Alonso A. Finite-Time Robust Trajectory Tracking Control for Robotic Manipulator Under Actuator Nonlinearities and Parametric Uncertainties // Journal of the Franklin Institute. – 2025. – Vol. 362, № 13. – Article 107891. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2025.107891.

40. Saraiva E. S., Govoni L., Salton A. T., Flores J. V., Cristofaro A. Practical Output Regulation of Robotic Manipulators: A Comparison Study // European Journal of Control. – 2025. – Vol. 82. – Article 101199. DOI: 10.1016/j.ejcon.2025.101199.

41. Ortiz-Ortiz E., Velázquez-Velázquez J. E., Silva-Ortigoza R., Galván-Guerra R. Trajectory Control of Manipulator Robots With Uncertainties: A Saturated Continuous Integral Sliding Mode Approach // International Journal of Mechanical System Dynamics. – 2026. – Vol. 6, № 1. – P. 106–118. DOI: 10.1002/msd2.70052.

42. Li Y., Xu Z., Yang X., Zhao Z., Zhuang L., Zhao J., Liu H. Identification and High-Precision Trajectory Tracking Control for Space Robotic Manipulator // Acta Astronautica. – 2024. – Vol. 214. – P. 484–495. DOI: 10.1016/j.actaastro.2023.11.001.

43. Yang Y., Xu H., Yao X. Disturbance Rejection Event-Triggered Robust Model Predictive Control for Tracking of Constrained Uncertain Robotic Manipulators // IEEE Transactions on Cybernetics. – 2024. – Vol. 54, № 6. – P. 3540–3552. DOI: 10.1109/TCYB.2023.3305941.

44. Hu S., Wan Y., Liang X. Adaptive Nonsingular Fast Terminal Sliding Mode Trajectory Tracking Control for Robotic Manipulators with Model Feedforward Compensation // Nonlinear Dynamics. – 2025. – Vol. 113. – P. 16893–16911. DOI: 10.1007/s11071-025-11008-3.

45. Chen Y., Li F., Zhang L. Fixed-Time Nonsingular Terminal Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Uncertain Robot Manipulators // Transactions of the Institute of Measurement and Control. – 2024. – Vol. 46, № 12. DOI: 10.1177/01423312241230032.

46. Su B. Tracking Control of Robotic Manipulator End-Effector Trajectory Based on Robust Sliding Mode Method // PLOS ONE. – 2025. – Vol. 20, № 4. – Article e0320118. DOI: 10.1371/journal.pone.0320118.

47. Wang Y., Zhou Y., Liu F., Leibold M., Buss M. Data-Driven Incremental Model Predictive Control for Robot Manipulators // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2025. – Vol. 30, № 6. – P. 4353–4363. DOI: 10.1109/TMECH.2024.3510729.

48. Cao M., Xiao L., Zuo Q., Li L., Gao X. Data-Based Model-Free Predictive Control System Under the Design Philosophy of MPC and Zeroing Neurodynamics for Robotic Arm Pose Tracking // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. – 2025. – Vol. 36, № 9. – P. 17477–17490. DOI: 10.1109/TNNLS.2025.3553195.

49. Momynkulov Z., Tursynova A., Olzhayev O. et al. Three-Dimensional Trajectory Planning for Robotic Manipulators Using Model Predictive Control and Point Cloud Optimization // Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2025. – Vol. 145, № 1. – P. 891–918. DOI: 10.32604/cmes.2025.068615.

50. Shen Y. Robotic Trajectory Tracking Control System Based on Fuzzy Neural Network // Measurement: Sensors. – 2024. – Vol. 31. – Article 101006. DOI: 10.1016/j.measen.2023.101006.

51. Aouaichia A., Stihi S., Fareh R., Abdul Majid A. R., Ghoul A., Bettayeb M., Kara K. Neural Network Model Predictive Control with Active Disturbance Rejection for Robot Manipulators Trajectory Tracking // Journal of the Franklin Institute. – 2025. – Vol. 362, № 13. – Article 107910. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2025.107910.

52. Tolykbayeva M. B., Kadyroldina A. T., Kussaiyn-Murat A. T., Krasavin A. L. Adaptive Control of Robot Manipulators – A Brief Review of Recent Advances // Вестник ВКТУ им. Д. Серикбаева. – 2022. – № 4. – P. 233–242. DOI: 10.51885/1561-4212_2022_4_233.

53. Толыкбаева М. Б., Құсайын-Мұрат Ә. Т., Красавин А. Л., Алонцева Д. Л., Кадыролдина А. Т. Адаптивное управление двухзвенным роботом-манипулятором // Вестник ВКТУ им. Д. Серикбаева. – 2023. – № 4. – С. 372–383. DOI: 10.51885/1561-4212_2023_4_372.

54. Nguyen X. Q., Nguyen C. C., Nguyen B. N. Robust Adaptive Trajectory Tracking Sliding Mode Control for Industrial Robot Manipulator Using Fuzzy Neural Network // Journal of Robotics and Control. – 2024. – Vol. 5, № 2. – P. 490–499. DOI: 10.18196/jrc.v5i2.20722

55. Qi M., Han S., Guo G., Liu P., Zhi Y., Zhao Z. Adaptive Trajectory Tracking Control of Robotic Manipulators Based on Integral Sliding Mode // Asian Journal of Control. – 2025. – Vol. 27, № 3. – P. 1361–1372. DOI: 10.1002/asjc.3507.

56. Yang X., Zhao Z., Li Y., Yang G., Zhao J., Liu H. Adaptive Neural Network Control of Manipulators with Uncertain Kinematics and Dynamics // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2024. – Vol. 133, Part A. – Article 107935. DOI: 10.1016/j.engappai.2024.107935.

57. Zhang Y., Zhao L. Adaptive Control and State Error Prediction of Flexible Manipulators Using Radial Basis Function Neural Network and Dynamic Surface Control Method // PLOS ONE. – 2025. – Vol. 20, № 2. – Article e0318601. DOI: 10.1371/journal.pone.0318601.

58. Ren Y., Liu W., Wang S., Lv G., Wen G. High-Accuracy Tracking Control for Uncertain Robot Manipulators: A Sparse Online Gaussian Process Approach // Robotic Intelligence and Automation. – 2025. – Vol. 45, № 2. – P. 273–282. DOI: 10.1108/RIA-10-2024-0237.

59. Xia Y., Liu Y., Sun W. Prescribed-Time Adaptive Event-Triggered Control for Robot Manipulators Based on Command Filtering // ISA Transactions. – 2025. – Vol. 163. – P. 1–8. DOI: 10.1016/j.isatra.2025.04.021.

60. Wu H., Jayawardhana B., Xu D. Task-Space Tracking of Robot Manipulators via Internal Model Principle Approach // Automatica. – 2025. – Vol. 174. – Article 112104. DOI: 10.1016/j.automatica.2024.112104.

61. de Cos C. R., Acosta J. A. Unified Force and Motion Adaptive-Integral Control of Flexible Robot Manipulators // ISA Transactions. – 2025. – Vol. 158. – P. 586–593. DOI: 10.1016/j.isatra.2025.01.030.

62. Calinon S. Geometric Structures for Learning and Optimization in Robotics // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. – 2026. – Vol. 9. – P. 123–146. DOI: 10.1146/annurev-control-022624-013742.

63. Espindola E., Tang Y. Geometric Sliding Mode Control of Mechanical Systems on Lie Groups // Automatica. – 2025. – Vol. 177. – Article 112346. DOI: 10.1016/j.automatica.2025.112346.

64. Shao N., Huang Y., Hong D. Left-Invariant Geometric Modelling and Tracking Control for Fully Actuated Robotic Manipulators // Applied Mathematical Modelling. – 2026. – Vol. 158. – Article 116977. DOI: 10.1016/j.apm.2026.116977.

65. Wang S., Hu H., Chen J., Song X., Tian Q. A Manifold Model Predictive Controller for Agile Pose Trajectory Tracking of an Orbital Space Robot // The International Journal of Robotics Research. – 2026. – Online First. DOI: 10.1177/02783649261433048.

66. Оразова А.Ж., Кадыролдина А.Т., Толыкбаева М.Б., Красавин А.Л., Алонцева Д.Л. Нелинейное управление роботами-манипуляторами – краткий обзор последних достижений // Вестник ВКТУ. – 2022. – № 3. – С. 182–189. DOI: 10.51885/1561-4212_2022_3_182.

67. Оразова А.Ж., Толыкбаева М.Б., Алонцева Д.Л. Робот-манипуляторды басқарудың бейімделген және сызықты емес әдістері // Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана: материалы Международной научно-технической конференции. – Усть-Каменогорск, 2022. – С. 220–224.

68. Толыкбаева М.Б., Құсайын-Мұрат Ә.Т., Даирбекова А.Е., Кадыролдина А.Т., Красавин А.Л., Beszedes B. Бейсызықты жазық жүйелердің траекториялық басқару әдісі // EKTU Journal of Information and Communication Sciences. – 2026. – Vol. 1, № 3. – P. 157–172.

69. Толыкбаева М.Б., Алонцева Д.Л., Красавин А.Л. Адаптивный контроллер для роботов-манипуляторов с неизвестной кинематикой и динамикой // Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана: сборник трудов X Международной научно-технической конференции. – Усть-Каменогорск, 2024. – Ч. 3. – С. 261–266.

70. Murray R.M., Li Z., Sastry S.S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation // CRC Press. - 1994.

71. Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds // – 2nd edition. – Springer. – 2018.

72. Khalil H. K. Nonlinear Systems // – 3rd edition. – Prentice Hall. – 2002.

73. Slotine J.-J. E., Li W // Applied Nonlinear Control. – Prentice Hall. – 1991.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Акт о внедрении научно-исследовательской работы в учебный процесс

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Д. СЕРИКБАЕВА»

СОГЛАСОВАНО
Член правления - проректор по науке и инновациям
Конурбаева Ж.Т.
«28» 02 2024 г.

УТВЕРЖДАЮ
Член правления-проректор по академическим вопросам
Машекенова А.Х.
«28» 02 2024 г.

АКТ
о внедрении научно-исследовательской работы (этапа) в учебный процесс

Комиссия Восточно-Казахстанского технического университета им. Д. Серикбаева в составе: председатель: Машекенова А.Х. - проректор по академическим вопросам, члены: декан Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта Хасенова З.Т., руководитель образовательной программы Григорьева С.В., член комитета по качеству Алимханова А.Ж., председатель комитета по качеству ШЦТиИИ Сулейменова Л.Р. составили настоящий акт о том, что в 2023/2024 учебном году на образовательной программе 7М07101-«Автоматизация и управление» внедрены результаты научно-исследовательской работы докторанта Толыкбаевой М.Б., выполненной под руководством профессора ШЦТиИИ, д.ф.-м.н. Алонцевой Д.Л., на тему: «Адаптивное управление роботом-манипулятором».

№ п/п	Форма внедрения (наименование нового курса, спецкурса, раздела лекций, лаб. работы, установки, учебные пособия и т.п.); курс, специальность	Объем внедрения (количество работ, лекционных часов)	Краткое содержание внедренной работы
1	Результаты НИР «Адаптивное управление роботом-манипулятором» внедрены в курс «Адаптивные методы прогнозирования параметров технологических процессов» (4 кредита) 1 и 2 курса по образовательной программе 7М07101-«Автоматизация и управление». Учебные материалы соответствуют силлабусу по данной дисциплине по разделу лекций, лабораторных занятий и заданий для самостоятельной работы обучающегося (СРО).	Лекции «5» - кол-во час. Лабораторные занятия «5» - кол-во час. Задания для самостоятельной работы обучающегося (СРО) «40» - кол-во часов	Использование разработанной авторами литературы 1. А.Ж. Оразова, М.Б. Толыкбаева, Д.Л. Алонцева *Робот-манипуляторды басқарудың бейімделген және сызықты емес әдістері*//Сборник трудов Международной НТК «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана» ВКТУ им. Д. Серикбаева, Апрель 2022 г., Усть-Каменогорск, Казахстан, стр. 220-224; 2. M.B. Tolykbayeva, A.T. Kadyroldina, A.T. Kussaiyn-Murat, A.L. Krasavin, G.M. Nazenova, O.B. Ospanov, A.M. Malgazhdarova, D.L. Alontseva *Adaptive control of robot manipulators – a brief review of recent advance*// Вестник ВКТУ №4, 2022, стр. 233-242. (DOI 10.51885/1561-4212_2022_4_233); 3. М.Б. Толыкбаева, Ә.Т. Құсайын-Мұрат, А.Л. Красавин, Д.Л. Алонцева, А.Т. Кадыролдина *Адаптивное управление двухзвенным роботом-манипулятором* // Вестник ВКТУ им Д.Серикбаева №4, 2023,

			стр. 372-383. (DOI 10.51885/1561-4212_2023_4_372) при чтении лекции по темам – *«Введение в методы адаптивного прогнозирования. Цели и задачи курса»,* – *«Адаптивные технологии. Проблемы и будущее адаптивных технологий»,* – *«Методы временных рядов в адаптивном прогнозировании»,* – *«Адаптивные нейронные сети в прогнозировании параметров процессов»,* – *«Применение адаптивных методов прогнозирования в реальных технологических системах»,* для лабораторной работы – *«Кейс-стадии по использованию адаптивных методов прогнозирования на примере конкретного технологического процесса (роботизированная плазменная обработка поверхности)»* и для заданий для самостоятельной работы обучающегося (СРО) по темам: – *«Адаптивное управление роботом-манипулятором с использованием двух основных подходов: теории устойчивости Ляпунова и теории гиперустойчивости»,* – *«Гибридная модель системы адаптивного управления путем объединения ПИД и ЭМАУ систем».*

Материалы к настоящему акту рассмотрены на заседании комитета по качеству Школы цифровых технологии и искусственного интеллекта (протокол № 9 от 16.02.2024 г.)

Члены комиссии:

Декан Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта		Хасенова З.Т.
Руководитель Образовательной программы 7М07101-«Автоматизация и управление»		Григорьева С.В.
Член комитета по качеству ШЦТиИИ		Алимханова А.Ж.
Председатель комитета по качеству ШЦТиИИ		Сулейменова Л.Р.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Программа для ЭВМ №38548



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ

РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

СВИДЕТЕЛЬСТВО

О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 38548 от «21» августа 2023 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (ов):
КАДЫРОЛДИНА АЛЬБИНА ТАЛАПЖАНОВНА, ҚҰСАЙЫН-МҰРАТ ӘСЕЛ ТҰҒЕЛБАЙҚЫЗЫ, ТОЛЫКБАЕВА МАРАЛ БАКЫТКАНОВНА

Вид объекта авторского права: **программа для ЭВМ**

Название объекта: **Восстановление поверхности по данным сканирования**

Дата создания объекта: **24.07.2023**

Подписано ЭЦП

Е. Оспанов